Théorème de Newton et polynômes symétriques

Exercice 1

Considérons les polynômes à deux variables x et y définis par :

$$s_1(x,y) = x + y \text{ et } s_2(x,y) = xy$$

Ces deux polynômes sont dits symétriques car $s_1(x,y) = s_1(y,x)$ et $s_2(x,y) = s_2(y,x)$.

Théorème de Newton
Pour tout entier naturel n, $x^n + y^n$ s'exprime à l'aide des polynômes symétriques s_1 et s_2 et des opérations $+$ et $\times$.

1. Déterminer $(x+y)^3$, $(x+y)^4$ et $(x+y)^5$.

2. Exprimer dans le tableau $x^n + y^n$ pour n = 2 à 5 en fonction de s_1 et s_2 où $s_1 = x + y$ et $s_2 = xy$.

Ligne i/colonne j	1	2
1	$x+y$	xy
2	x^2+y^2	=
3	x^3+y^3	=
4	x^4+y^4	=
5	x^5+y^5	=

3. On considère l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Cette équation admet deux racines réelles x_1 et x_2.
   Sans calculer les racines, déterminer ${x_1}^2 + {x_2}^2$, ${x_1}^3 + {x_2}^3$, ${x_1}^4 + {x_2}^4$ et ${x_1}^5 + {x_2}^5$.

4. On considère l'équation $x^2 - 11x + 30 = 0$.
   On admet que cette équation admet deux racines réelles x_1 et x_2.
   Déterminer sans calculer x_1 et x_2 les valeurs des expressions ${x_1}^2 + {x_2}^2$ et ${x_1}^3 + {x_2}^3$.