

Théorème de Newton et polynômes symétriques

exercice 2

Considérons les trois polynômes à trois variables x, y et z définis par :

$$s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + yz + xz \quad \text{et} \quad s_3 = xyz$$

1. Ces trois polynômes sont-ils symétriques ?
2. Exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ en fonction de s_1, s_2 et s_3 .
3. Démontrer que $x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) = s_1s_2 - s_3$.
4. Compléter logiquement le tableau ci-dessous :

i/j	1	2	3
1	$x + y + z$	$xy + yz + xz$	xyz
2	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^2y + x^2y + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$	$x^2yz + y^2xz + z^2xy$
3	$x^3 + y^3 + z^3$	$x^3y + x^3y + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y$	$x^3yz + y^3xz + z^3xy$
4	$x^4 + y^4 + z^4$		
6			
7			

5. Démontrer que $t(i, 1) \times t(1, j) = t(i + 1, j) + t(i, j + 1)$ où $t(i, j)$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j du tableau.

Théorème de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + y^n + z^n$ s'exprime à l'aide des polynômes symétriques s_1, s_2 et s_3 et des opérations $+$ et \times .

6. Par quel type de raisonnement pourrions-nous démontrer le théorème de Newton ?