éléments de calcul propositionnel

Une assertion est un énoncé ne contenant pas de variable pouvant être vrai ou faux. On dit que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont Vrai et Faux.

Soit A et B deux assertions. On peut définir de nouvelles assertions à l'aide des connecteurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, d'implication et d'équivalence, respectivement ¬, ET (∧), OU (∨), ⇒ et ⇔.

Négation d'une assertion

Soit A une assertion. On définit sa négation notée ¬A ou $\bar{A}$ par sa table de vérité.

A	¬A
V	F
F	V

Exemple

Soit A l'assertion : "Le triangle ABC est un triangle rectangle".

Lorsque cette assertion A est vraie, l'assertion ¬A : "Le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle" est fausse.

Lorsque A est fausse, l'assertion ¬A : "Le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle" est vraie.

Connecteur logique ET

Soient A et B deux assertions. On définit l'assertion "A et B" (A ∧ B) par la table de vérité ci-dessous :

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

Soit A l'assertion : "Le triangle ABC est un triangle rectangle".

Soit B l'assertion : "Le triangle ABC est isocèle".

Si A et B sont toutes deux vraies, alors l'assertion $A \wedge B$: " Le triangle ABC est un triangle rectangle et est isocèle" est vraie (ligne 2 de la table de vérité).

Si l'une des deux assertions est fausse ou si les deux sont fausses, alors l'assertion $A \wedge B$: " Le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle" est fausse (lignes 3 à 5 de la table de vérité).

Connecteur logique OU

On définit l'assertion "A ou B" ($A \vee B$) par la table de vérité ci-dessous :

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

Soit A l'assertion : "Reinhold MESSNER a gravi l'Annapurna".

Soit B l'assertion : " Reinhold MESSNER a gravi l'Everest ".

Si A et B sont toutes deux vraies ou si l'une ou l'autre des deux assertions est vraie, alors l'assertion $A \vee B$: " Reinhold MESSNER a gravi l'Annapurna ou l'Everest" est vraie (ligne 2 à 4 de la table de vérité).

Si les des deux assertions sont fausses, alors l'assertion $A \vee B$: " Reinhold MESSNER a gravi l'Annapurna ou l'Everest" est fausse (ligne 5 de la table de vérité).

Lois de MORGAN

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$$

et

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$$

Exercice

Vérifier en complétant les tables de vérité ci-dessous les lois de Morgan

A	B	A ∧ B	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

A	B	A ∨ B	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Remarque

Soit A l'assertion : "2 + 2 = 4". Cette assertion est toujours vraie.

En conséquence, écrire l'assertion "2 + 2 = 4" ou écrire l'assertion "2 + 2 = 4" est vraie est tautologiquement équivalent.

Implication logique

Soient A et B deux propositions.

On définit l'implication logique "A ⇒ B" par la table de vérité.

A	B	A ⇒ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La compréhension de la table de vérité de l'implication logique n'est pas nécessairement intuitive ou aisée.

Exemple 1

Considérons les deux assertions : A : "Il pleut".

B : "Je prends un parapluie".

L'assertion A $\Rightarrow$ B se lit "S'il pleut, alors je prends un parapluie".

— Supposons A $\Rightarrow$ B vraie (ligne 2 de la table de vérité).

— Si A vraie ("il pleut"), alors B fausse ("je ne prends pas un parapluie") est une assertion qui contredit l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B : "S'il pleut, alors je prends un parapluie". Donc A $\Rightarrow$ B fausse (ligne 3 de la table de vérité).

— Si A fausse ("il ne pleut pas"), alors B vraie ("je prends un parapluie") est une assertion qui ne contredit pas l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B : "S'il pleut, alors je prends un parapluie". Je suis simplement prudent (ligne 4 de la table de vérité).

— Si A fausse ("il ne pleut pas"), alors B fausse ("je ne prends pas un parapluie") est une assertion qui ne contredit pas l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B : "S'il pleut, alors je prends un parapluie". En toute logique, je n'ai pas besoin de parapluie (ligne 5 de la table de vérité).

Exemple 2

Considérons les deux assertions : A : "Je vais à la plage en été".

B : "Je bronze".

L'assertion A $\Rightarrow$ B se lit "Si je vais à la plage en été, alors je bronze".

— Supposons A $\Rightarrow$ B vraie (ligne 2 de la table de vérité).

— Si A vraie ("Je vais à la plage en été "), alors B fausse ("je ne bronze pas") est une assertion qui contredit l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B. Donc A $\Rightarrow$ B fausse (ligne 3 de la table de vérité).

— Si A fausse ("Je ne vais pas à la plage en été"), alors B vraie ("je bronze") est une assertion qui ne contredit pas l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B. Je peux aussi aller à la montagne ou profiter de mon jardin (ligne 4 de la table de vérité).

— Si A fausse ("Je ne vais pas à la plage en été "), alors B fausse ("je ne bronze pas ") est une assertion qui ne contredit pas l'assertion vraie A $\Rightarrow$ B. Je suis peut-être resté enfermé dans ma chambre (ligne 5 de la table de vérité).

Exercice 1

Considérons les deux assertions : A : "Je mange des épinards au repas de midi".
B : "J'ai droit à une glace à la pistache au dessert".

L'assertion A ⇒ B se lit "Si je mange des épinards au repas de midi, alors j'ai droit à une glace à la pistache au dessert".

— Supposons A ⇒ B vraie (ligne 2 de la table de vérité).

Compléter la table de vérité en justifiant la réponse par l'argument approprié parmi les trois arguments : DURA LEX SED LEX, INJUSTICE et INDULGENCE.

A	B	A ⇒ B	Argument
V	V	V	
V	F		
F	V		
F	F		

Exercice 2

Considérons les deux assertions : A : "Je joue au loto".
B : "Je peux gagner un million d'euros au loto".

L'assertion A ⇒ B se lit "Si je joue au loto, alors je peux gagner un million d'euros".

— A ⇒ B vraie (ligne 2 de la table de vérité).

Compléter la table de vérité en justifiant la réponse par l'argument approprié parmi LOGIQUE, ABSURDE et CONTRADICTOIRE.

A	B	A ⇒ B	Argument
V	V	V	
V	F		
F	V		
F	F		

Exercice 3

Voici 3 affirmations vraies.

a) Les araignées sont des arachnides.
b) Les scorpions sont des arachnides.
c) Les arachnides subissent des mues.

Voici 3 raisonnements ; dire s'ils sont vrais ou faux en précisant le raisonnement.

1) Cet animal subit une mue donc c'est un arachnide.
2) Cet animal est une araignée donc il subit une mue.
3) Cet animal subit une mue et est un arachnide donc c'est une araignée.
4) Cet animal ne subit pas de mue donc ce n'est pas un arachnide.

Exercice 4

1. - Aucun docteur n'est enthousiaste.
   - Vous êtes enthousiaste.
   Vous n'êtes pas docteur. Vrai/Faux

2. - Quelques chandelles éclairent très mal.
   - Les chandelles sont faites pour éclairer.
   Quelques objets faits pour éclairer le font très mal. Vrai/Faux

3. - Aucun prof n'est ignorant.
   - Les gens ignorants sont vaniteux.
   Aucun prof n'est vaniteux Vrai/Faux

4. - Quelques gourmets manquent de culot.
   - Tous mes oncles ont du culot.
   Mes oncles ne sont pas des gourmets. Vrai/Faux

Exercice 5

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1) A l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2) A côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?

3) Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?

4) Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Équivalence logique

Soient A et B deux propositions.

On définit l'équivalence logique "A $\Leftrightarrow$B" par la table de vérité.

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Assertions tautologiquement équivalentes

Lorsque les tables de vérité de deux assertions coïncident, on dit que les assertions sont tautologiquement équivalentes. Le symbole ≡ signifie "tautologiquement équivalent à".

Deux équivalences très utiles :

$$\neg(A \Longrightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

$$A \Longrightarrow B \equiv \neg B \Longrightarrow \neg A$$

Cette dernière équivalence est la base du raisonnement par contraposition.

<u>Exercice</u>

1. Vérifier les deux équivalences ci-dessus à l'aide des tables de vérité :

A	B	A $\Rightarrow$ B	$\overline{A \Longrightarrow B}$	A	$\bar{B}$	$A \wedge \bar{B}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

A	B	A $\Rightarrow$ B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2. On considère les assertions suivantes :

   A : "Hugo a 23 ans" et

   B : "Hugo a l'âge légal pour passer son permis de conduire".

   2.1. L'assertion A $\Rightarrow$ B est-elle vraie ?

   2.2. Si l'assertion B est fausse, alors que peut-on en déduire ?

   2.3. Pour démontrer qu'une assertion A $\Rightarrow$ B est vraie, on démontre souvent que l'assertion $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ est vraie. Comment appelle-t-on ce type de raisonnement ?

3. On considère les assertions suivantes :

   A : "Le nombre n divise 18".

   B : "Le nombre n divise 9".

   3.1. L'assertion A $\Rightarrow$ B est-elle vraie ?

   3.2. L'assertion $\overline{A \Longrightarrow B}$ est-elle vraie ?

   3.3. Pour démontrer que l'assertion A $\Rightarrow$ B est fausse, il suffit de démontrer que l'assertion $A \wedge \bar{B}$ est vraie. Comment appelle-t-on ce type de raisonnement ?

Propriétés des connecteurs logiques

$\overline{(\bar{A})} = A$ (ce langage est le langage des événements utilisé en probabilités)

On écrira aussi, suivant la convention adoptée pour la négation : $\neg(\neg A) = A$.

$A \equiv A \wedge A$ $\qquad$ $A \equiv A \vee A$

$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $\qquad$ $A \vee B \equiv B \vee A$

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ $\qquad$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

Lois de Morgan

$\overline{(A \wedge B)} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$ $\qquad$ $\overline{(A \vee B)} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$

Tautologies

$A \vee \bar{A}$ $\qquad$ $\overline{(A \wedge \bar{A})}$ $\qquad$ $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$