Qu'est-ce qu'une fonction ?

Graphe

On appelle graphe Γ tout ensemble dont les éléments sont des couples.

<u>Conséquence</u> : Tout graphe est une partie d'un ensemble produit.

<u>Exemple</u>

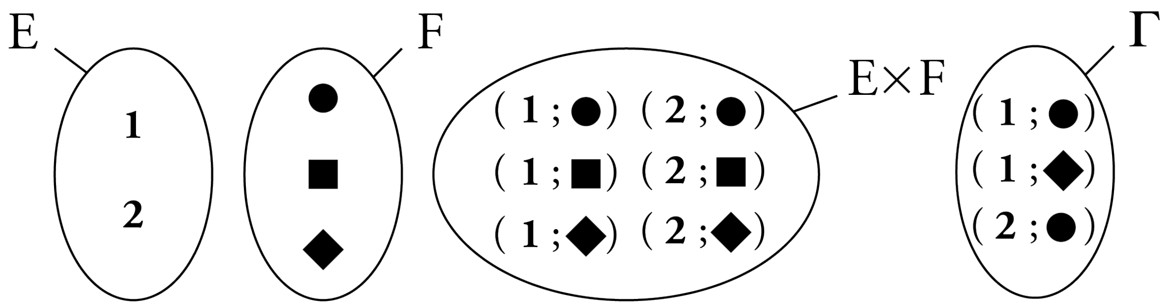
Soient E et F deux ensembles définis par E ={1, 2} et F = {●, ■, ◆}.

Considérons le produit cartésien de E par F.

On a : E × F = {(1, ●), (1, ■), (1, ◆), (2, ●), (2, ■), (2, ◆)}.

Card(E × F) = Card(E) × Card(F) = 2 × 3 = 6.

L'ensemble Γ = {(1, ●), (1, ◆), (2, ●)} est un graphe avec Γ ⊂ E × F.

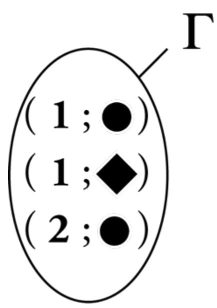


<u>Définition</u>

On qualifie de graphe fonctionnel tout graphe Γ tel que, pour tout x, il existe **au plus** un y vérifiant $(x, y) \in \Gamma$.

<u>Contre-exemple</u>

Le graphe ci-dessus n'est pas fonctionnel car pour l'élément 1, il existe plus de un élément y tel $(1, y) \in \Gamma$.

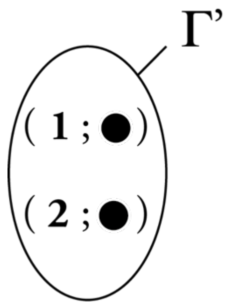


On a : (1, ●) ∈ Γ et (1, ◆) ∈ Γ.

Exemple

Le graphe Γ' ci-dessous est **fonctionnel** car pour tout élément x, il existe au plus un élément y tel $(x, y) \in \Gamma'$.

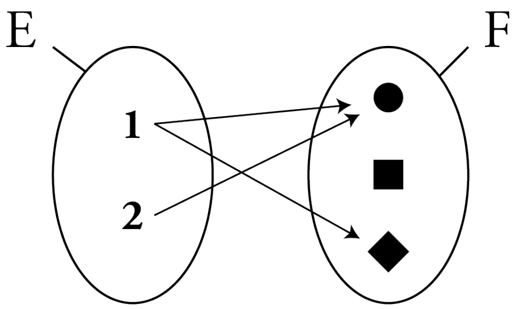
L'ensemble $\Gamma' = \{(1, ●), (2, ●)\}$ est un graphe avec $\Gamma' \subset E \times F$.



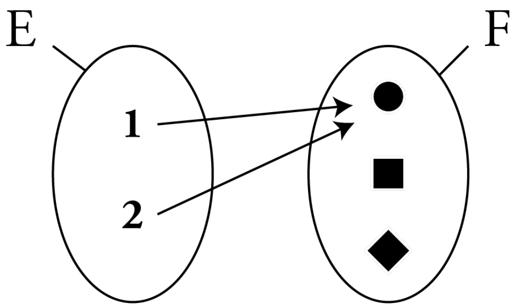
Correspondance

Soient E et F deux ensembles. On appelle correspondance de E vers F ou de E dans F tout triplet de la forme (Γ, E, F) où $\Gamma \subset E \times F$.

Exemple - Correspondance avec le graphe Γ



Exemple - Correspondance avec le graphe fonctionnel Γ'



Chaque élément de l'ensemble de départ a au plus une image. Les éléments de l'ensemble d'arrivée peuvent avoir plusieurs antécédents.

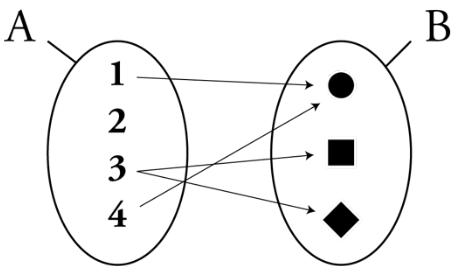
Définition d'une fonction

On appelle **fonction** toute **correspondance** dont le **graphe est fonctionnel.**

Exercice

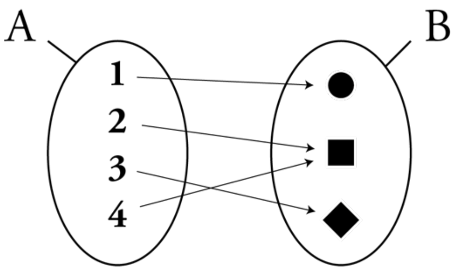
Indiquer dans chaque cas si la correspondance représentée est une fonction.

Cas 1



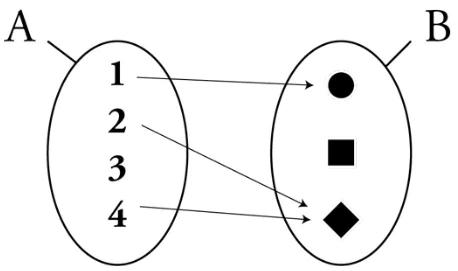
Fonction ? Vrai ☐ / Faux ☐

Cas 2



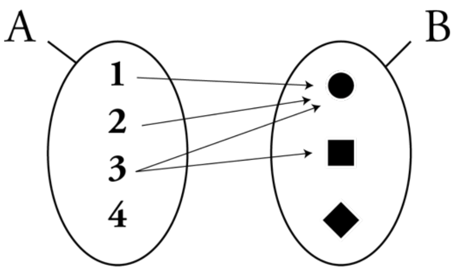
Fonction ? Vrai ☐ / Faux ☐

Cas 3



Fonction ? Vrai ☐ / Faux ☐

Cas 4



Fonction ? Vrai ☐ / Faux ☐

Ensemble de définition

Soit Γ un graphe. Il existe un et un seul ensemble noté $pr_1\Gamma$ possédant la propriété suivante :

$$\forall x \ (x \in pr_1\Gamma) \Leftrightarrow (\exists y \ (x, y) \in \Gamma)$$

De même, il existe un et un seul ensemble noté $pr_2\Gamma$ possédant la propriété suivante :

$$\forall y \ (y \in pr_2\Gamma) \Leftrightarrow (\exists x \ (x, y) \in \Gamma)$$

Dans une correspondance $(\Gamma, \mathrm{E}, \mathrm{F})$:

— E est l'ensemble de départ,

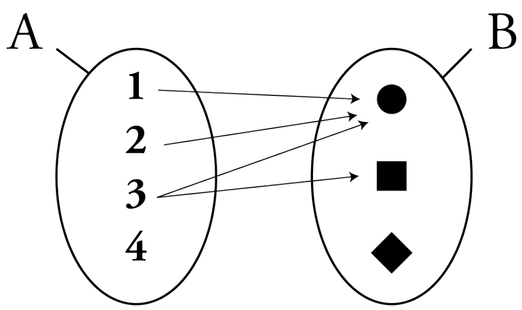
— $pr_1\Gamma$ est l'ensemble de définition,

— F est l'ensemble d'arrivée, et

— $pr_2\Gamma$ est l'ensemble image ou ensemble des valeurs.

Exemple

On considère la correspondance $(\Gamma, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ ci-dessous :



L'ensemble de départ est A = {1, 2, 3, 4}

L'ensemble de définition est $pr_1\Gamma = \{1,2,3\}$

L'ensemble image est $pr_2\Gamma = \{$●, ■$\}$.

L'ensemble d'arrivée est B = {●, ■, ◆}.

Exercices d'application

1. On considère le graphe $\Gamma = \{(x, y) | y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.1. Expliciter l'ensemble de départ, l'ensemble de définition $pr_1\Gamma$, l'ensemble image $pr_2\Gamma$ et l'ensemble d'arrivée de la correspondance.

1.2. La correspondance est-elle une fonction ?

2. On considère le graphe $\Gamma' = \left\{(x,y) | y = \sqrt{x}\ \ \forall x \geq 0\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma', \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.1. Expliciter l'ensemble de départ, l'ensemble de définition $pr_1\Gamma'$, l'ensemble image $pr_2\Gamma'$ et l'ensemble d'arrivée de la correspondance.

2.2. La correspondance est-elle une fonction ?

3. Soit le graphe $\Gamma" = \left\{(x,y) | y = \frac{1}{x}\ \forall x \neq 0\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma", \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.1. Expliciter l'ensemble de départ, l'ensemble de définition $pr_1\Gamma"$, l'ensemble image $pr_2\Gamma"$ et l'ensemble d'arrivée de la correspondance.

3.2. La correspondance est-elle une fonction ?

4. Soit le graphe $\mathcal{G} = \left\{(n,u) | u = (2n+1)\frac{\pi}{3}\right\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\mathcal{G}, \mathbb{N}, \mathbb{R})$.

4.1. Expliciter l'ensemble de départ, l'ensemble de définition $pr_1\mathcal{G}$, l'ensemble image $pr_2\mathcal{G}$ et l'ensemble d'arrivée de la correspondance.

4.2. La correspondance est-elle une fonction ?

5. Soit le graphe $\mathcal{G}' = \{(x,y) | y = e^x\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\mathcal{G}', \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5.1. Expliciter l'ensemble de départ, l'ensemble de définition $pr_1\mathcal{G}'$, l'ensemble image $pr_2\mathcal{G}'$ et l'ensemble d'arrivée de la correspondance.

5.2. La correspondance est-elle une fonction ?

Définition d'une application

On appelle **application** toute **correspondance** dont le **graphe est fonctionnel** et dont l'ensemble de définition **coïncide** avec l'ensemble de départ.

Autrement dit, une application de E dans F (E vers F) est une correspondance $f = (\Gamma, E, F)$ telle que $\forall x \in E\ \ \exists!\, y \in F \mid (x,y) \in \Gamma$.

Étant donné $x \in E$, l'unique élément de F qui lui est associé se note $f(x)$. On dit que x est un antécédent, par forcément unique, de cet élément de F.

Exercices d'application

1. Soit le graphe $\Gamma = \left\{(x, y) | y = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐

2. Soit le graphe $\Gamma = \left\{(x, y) | y = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐

3. Soit le graphe $\Gamma = \{(x, y) | y = \sqrt{x} \ \ \forall x \geq 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, [0; +\infty[, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐

4. Soit le graphe $\Gamma = \{(x, y) | y = \sqrt{x} \ \ \forall x \geq 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐

5. Soit le graphe $\Gamma = \{(x, y) | y = e^x\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐

6. Soit le graphe $\Gamma = \left\{(x, y) | y = (2x + 1)\frac{\pi}{3}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la correspondance $(\Gamma, \mathbb{N}, \mathbb{R})$.

   La correspondance est une fonction. Vrai ☐ / Faux ☐

   La correspondance est une application Vrai ☐ / Faux ☐