une équation de degré 3

Cardan et Bombelli ont démontré au 16ème siècle que les équations qui se présentaient sous la forme $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des nombres réels ont au moins une solution réelle x_0 dont l'expression peut s'écrire, par exemple :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

On considère l'équation du troisième degré $x^3 - 15x - 4 = 0$ (E)+

1) L'équation (E) est-elle de la forme $x^3 + px + q = 0$?

2) Montrer que l'expression de la solution x_0 associée à (E) s'écrit :

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}.$$

3) Exprimer -121 sous la forme $(ai)^2$ où $i^2 = -1$.

4) En déduire une écriture complexe pour x_0.

5) Montrer que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$. En déduire $(2 - i)^3$.

6) Déterminer x_0.

7) Vérifier que le nombre 4 est une solution de l'équation (E).

8) On pose $x^3 - 15x - 4 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

Démontrer que $\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = -15 \\ x_0x_1x_2 = 4 \end{cases}$

9) Justifier que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$

10) Démontrer que $(x_1 - x_2)^2 = 12$.

11) En déduire x_1 et x_2.

12) Vérifier que x_1 est solution de l'équation (E). Pourquoi sommes-nous alors certains que x_2 est aussi solution de l'équation (E) ?