L'équation de CARDAN

On considère l'équation : $x(10-x)=40$ (appelée équation de CARDAN).

1) $x(10-x)=40 \Leftrightarrow 10x-x^2=40 \Leftrightarrow -x^2+10x-40=0 \Leftrightarrow x^2-10x+40=0$
Donc résoudre $x(10-x)=40$ équivaut à résoudre $x^2-10x+40=0$.

---

2) Résolvons l'équation de CARDAN.
$x^2-10x+40=(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1+x_2=10$ et $x_1x_2=40$.

Développons $(x_1+x_2)^2$.

On a : $(x_1+x_2)^2={x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2={x_1}^2+{x_2}^2+2x_1x_2$

D'où : $(10)^2={x_1}^2+{x_2}^2+2(40)$

C'est-à-dire : $100={x_1}^2+{x_2}^2+80$

Conclusion : ${x_1}^2+{x_2}^2=100-80=20$

Développons $(x_1-x_2)^2$.

On a : $(x_1-x_2)^2={x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2={x_1}^2+{x_2}^2-2x_1x_2$

Donc : $(x_1-x_2)^2=20-2(40)=20-80=-60$.

Vouloir résoudre l'équation de CARDAN revient donc à vouloir déterminer les valeurs de deux nombres x_1 et x_2 tels que :

$$\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ (x_1-x_2)^2=-60 \end{cases}$$

Or, un carré de nombre réel étant supposé toujours positif ou nul, il est impossible de trouver deux réels x_1 et x_2 tels que $(x_1-x_2)^2=-60$.

L'équation de CARDAN ne possède pas de solutions réelles.

---

3) Démontrons que les solutions de l'équation de CARDAN sont les solutions de l'équation :

$$(x-5)^2+15=0$$

Le résultat est évident car $x(10-x)=40 \Leftrightarrow x^2-10x+40=0$
où : $x^2-10x+40=x^2-2(5)(x)+40=(x-5)^2-25+40=(x-5)^2+15$

Résolvons $(x-5)^2+15=0$.
$(x-5)^2+15=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=-15$. Cette équation n'admet aucune solution réelle car le carré d'un réel est toujours positif ou nul. L'équation de CARDAN ne possède donc pas de solutions réelles.

---

4) Par application de la méthode du discriminant, rechercher les solutions de l'équation :

$$x^2-10x+40=0$$

Déterminons le discriminant Δ du trinôme $x^2-10x+40$.
$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(1)(40)=100-160=-60<0$.
Le trinôme n'admettant aucune racine réelle car $\Delta<0$, l'équation de CARDAN n'admet aucune solution réelle.

5) Imaginons qu'il existe un nombre tel que son carré soit égal à -1 et notons ce nombre i.

Ne peut-on pas dorénavant proposer des solutions à l'équation de CARDAN ?

Résoudre l'équation de CARDAN revient à résoudre l'équation $(x-5)^2 = -15$.

Si $i^2 = -1$, alors $-15 = 15i^2 = \left(i\sqrt{15}\right)^2$.
D'où : $(x-5)^2 = \left(i\sqrt{15}\right)^2$.
Or : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0$
Donc : $(x-5)^2 = \left(i\sqrt{15}\right)^2 \Leftrightarrow ((x-5) - i\sqrt{15})((x-5) + i\sqrt{15}) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5 - i\sqrt{15})(x - 5 + i\sqrt{15}) = 0 \Leftrightarrow x = 5 + i\sqrt{15}$ ou $x = 5 - i\sqrt{15}$

L'équation de CARDAN possède deux racines exprimables à l'aide du nombre i dont la carré est égal à -1.