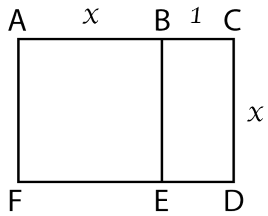
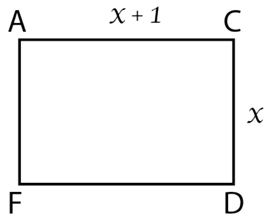
Le nombre d'or

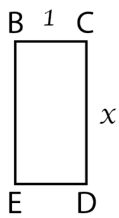
On considère la figure :



Les rectangles ACDF et BCDE ont les mêmes proportions avec AB = CD = x et BC = 1.

1) Pour les rectangles ACDF et BCDE, voir ci-dessous :





2) Démontrons que : $x^2 - x - 1 = 0$.

Les rectangles ACDF et BCDE ont les mêmes proportions, donc : $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$

D'où : $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$.

En conséquence : $(x+1) \times 1 = x \times x$

D'où : $x + 1 = x^2$.

En résultat : $x^2 - x - 1 = 0$.

3) On admet que : $x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$

Montrons que : $x_1 + x_2 = 1$

$x_1 x_2 = -1$

On a : $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$

Or : $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x - 1 = x^2 - (1)x + (-1)$

Deux trinômes du second degré sont égaux quand leurs coefficients sont deux à deux égaux.

Donc : $x_1 + x_2 = 1$

Et : $x_1 x_2 = -1$

4) Développons $(x_1 + x_2)^2$ et montrons que ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 3$.

On a : $(x_1 + x_2)^2 = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2$

D'où : $(1)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2(-1)$

C'est-à-dire : $1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2$

Conclusion : ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 + 2 = 3$

5) Montrons que $(x_1 - x_2)^2 = 5$

On a : $(x_1 - x_2)^2 = x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2$

Donc : $(x_1 - x_2)^2 = 3 - 2(-1) = 5$.

6) Démontrons que x_1 et x_2 sont solutions du système (S) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$.

D'après les questions précédentes, on a : $(x_1 - x_2)^2 = 5$ et $x_1 + x_2 = 1$.

D'où : $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{5}$ et $x_1 + x_2 = 1$.

Conclusion : x_1 et x_2 sont solutions des systèmes ci-dessous :

$$(S_1)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ et } (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

Lesquels sont équivalents, puisque :

$$(S_1)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 1 \\ x_2 - x_1 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

En résultat, x_1 et x_2 sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

7) Montrons que AB = φ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or.

Résolvons (S) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 + \sqrt{5} \\ 2x_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

La valeur de AB est la solution positive du système ci-dessus, donc : $AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

8) Déterminons par la méthode du discriminant les éventuelles solutions de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Calculons le discriminant Δ du trinôme $x^2 - x - 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.

Le trinôme $x^2 - x - 1$ admet deux racines x_1 et x_2, solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On a : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

9) A l'aide la calculatrice graphique, résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est aisé en tapant l'expression, puis en utilisant la touche "calc".

10) A l'aide de GeoGebra, vérifier la cohérence des résultats obtenus s'avère trivial en visualisant les zéros de la fonction : $x \longmapsto x^2 - x - 1$.