Nombres complexes

exercice 1 6 points

Déterminons la forme algébrique des nombres complexes ci-dessous :

1. $(1+i)^2 = 2i$
2. $(2+i)^3 = 2+11i$
3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = -i$
4. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
5. $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
6. $\frac{i}{1+i} - \frac{1}{1-i} = 0$

exercice 2 6 points

On se propose de résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

1. On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = 36.$ 1 point
2. $\Delta = (6i)^2 = (6)^2(i)^2 = 36 \times (-1) = -36..$ 0,5 point
3. Les solutions complexes z_1 et z_2 de l'équation sont : 2 points

   $z_1 = \frac{-(-4)-6i}{2(1)} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$ et son conjugué $z_2 = 2+3i$.
4. Calculons $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$. 2,5 points

   $z_1 + z_2 = 4$ et $z_1 z_2 = 13$

   Ces deux valeurs sont les coefficients s et p de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

exercice 3 4 points

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} -2z + z' = 1 - 9i \\ z + 2z' = 7 + 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2z + z' = 1 - 9i \ (L1) \\ z + 2z' = 7 + 2i \ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z + z' = 1 - 9i \ (L1) \\ 2z + 4z' = 14 + 4i \ (L2) \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z + z' = 1 - 9i \\ 5z' = 15 - 5i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = z' - 1 + 9i \\ z' = 3 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 3 - i - 1 + 9i = 2 + 8i \\ z' = 3 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 4i \\ z' = 3 - i \end{cases}$$

exercice 4 4 points

Soit $a = 12 - 5i$ et $b = 3 + 4i$.

1. Calculer $|a| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ et $|b| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. 2 points
2. $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{12+5i}{3-4i} = \frac{(12+5i)(3+4i)}{25} = \frac{36-20+(15+48)i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63}{25}i.$ 2 points