Nombres complexes

exercice 1

Déterminons la forme algébrique des nombres complexes (calculs très simples) :

1. $2i\ +\ 3\ -\ (5i\ -1) = 4 - 3i$
2. $4\ -\ (3i\ +7)\ +\ i\ -7i = -3 - 9i$
3. $4(3 + 2i) - 2(4 - 3i) = 4 + 14i$
4. $3 + (i - 2) + i = 1 + 2i$
5. $(2 + 3i)(1 + i) = -1 + 5i$
6. $3 - 5i - (2 + i) + 8i + 3 = 4 + 2i$
7. $(4 - 3i)(2 - 3i) = -1 - 18i$
8. $3(2 - i) - 2(1 + 2i) = 4 - 7i$

exercice 2

Déterminons la forme algébrique des nombres complexes :

1. $(1 - i)^2 = 1^2 - 2(1)(i) + i^2 = -2i$
2. $(1 + i)^3 = 1^3 + 3(1)^2(i) + 3(1)(i)^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$
3. $(1 + i)^4 = 1^4 + 4(1)^3(i) + 6(1)^2(i)^2 + 4(1)(i)^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1$

   $(1 + i)^4 = -4$
4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1 - i)^2 = \frac{1}{2}(-2i) = -i$
5. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \sqrt{3}i\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1^2 + 2(1)\left(\sqrt{3}i\right) + \left(\sqrt{3}i\right)^2\right)$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-2 + 2\sqrt{3}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6. $\frac{1}{1-2i} = \frac{(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(1+2i)}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
7. $\frac{2i}{(1+i)^2} = \frac{2i}{2i} = 1$
8. $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1-i)-(1+i)}{2} = \frac{(1-i)-(1+i)}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

exercice 3

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Déterminons Δ, discriminant du trinôme $5x^2 + 2x + 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

Les racines complexes du trinôme sont les complexes conjugués z et $\bar{z}$ où :

$$z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4i}{2(5)} = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

En résultat, l'équation a deux solutions complexes conjuguées $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ et $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

exercice 4

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3z - 2z' = -13i \\ z + z' = 5 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z - 2z' = -13i & (L1) \\ z + z' = 5 - i & (L2) \end{cases} \underset{2 \times (L2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3z - 2z' = -13i & (L1) \\ 2z + 2z' = 10 - 2i & (L3) \end{cases} \underset{(L3) + (L1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 5z = -13i + 10 - 2i = 10 - 15i \\ z' = 5 - i - z' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{10 - 15i}{5} = 2 - 3i \\ z' = 5 - i - (2 - 3i) = 3 + 2i \end{cases}$$

Le système a pour solution le couple de complexes $(2 - 3i; 3 + 2i)$.