Un nombre dont le carré est -1 ?

Exercice 1

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$x^2 + 1 = 0$$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - i)(x + i) = 0 \Leftrightarrow x - i = 0$ ou $x + i = 0 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

L'équation admet les deux solutions imaginaires pures $-i$ et i.

Exercice 2

1. On a : $\left(i\sqrt{3}\right)^2 = (i)^2\left(\sqrt{3}\right)^2 = -3.$
2. Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Déterminons le discriminant Δ du trinôme ci-dessus.

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

Le trinôme admet les deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2(1)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ces deux racines sont conjuguées : $z_2 = \overline{z_1}$.

En résultat, l'équation a pour solutions $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 3

1. On a : $\left(2\sqrt{3}i\right)^2 = (2)^2\left(\sqrt{3}\right)^2(i)^2 = -4 \times 3 = -12.$
2. Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$x^2 - 6x + 12 = 0$$

Déterminons le discriminant Δ du trinôme ci-dessus.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(12) = 36 - 36 - 12 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$$

Le trinôme admet les deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2(1)} = 3 - \sqrt{3}i$$

et

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 + \sqrt{3}i$$

Ces deux racines sont conjuguées : $z_2 = \overline{z_1}$.

En résultat, l'équation a deux solutions complexes : $3 - \sqrt{3}i$ et $3 + \sqrt{3}i$.

Exercice 4

On souhaite résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) :

$$x^4 = 1$$

1. Montrons que : $x^4 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$.

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1$

2. Résolvons l'équation (E).

$x^4 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x^2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -i$ ou $x = i$.

L'équation admet les 4 solutions -1, 1, -i et i.

Nous avons vu que l'ensemble {-1 ; 1 ; -i ; i} muni de la loi de composition interne × forme un groupe algébrique.

×	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Exercice 5

On souhaite résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) :

$$x^3 = 1$$

1. Montrons que : $x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$.

   $(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

   $\Leftrightarrow x^3 = 1$

2. Déterminons les solutions de l'équation (E).

   $x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow \ x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ d'après l'exercice 2.