Les nombres complexes exercices

Exercice 11

Écrire les conjugués des nombres suivants sous forme algébrique.

1. Le conjugué du nombre $-2+3i$ est $-2-3i$.
2. Le conjugué du nombre $5-7i$ est $5+7i$.
3. Le conjugué de $i(2-5i)$ est $\overline{i(2-5i)} = \bar{i} \times \overline{(2-5i)} = -i(2+5i) = 5-2i$
4. Le conjugué de $\frac{1}{1+i}$ est $\overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{1}{\overline{1+i}} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
5. Le conjugué de $\frac{1-i}{2i}$ est $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)} = \frac{\overline{1-i}}{\overline{2i}} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
6. Le conjugué de $\frac{1+2i}{1-i}$ est $\overline{\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)} = \frac{\overline{1+2i}}{\overline{1-i}} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{2} = \frac{-1-3i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

Exercice 12

Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui possèdent deux solutions complexes conjuguées ?

1. $3z^2+1=0 \Leftrightarrow \overline{3z^2+1} = \overline{0} \Leftrightarrow 3\overline{z^2}+1=0 \Leftrightarrow 3(\overline{z})^2+1=0.$

   S'il existe un nombre a tel que a est solution de $3z^2+1=0$, comme cette équation est équivalente à l'équation $3(\overline{z})^2+1=0$, alors a vérifie $3(\overline{a})^2+1=0$. Ce qui signifie que $\overline{a}$ est solution de l'équation $3z^2+1=0$.

2. $2z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \overline{2z^2-z+1} = \overline{0} \Leftrightarrow 2\overline{z^2}-\overline{z}+1=0$

   $\Leftrightarrow 2(\overline{z})^2-\overline{z}+1=0$. Autrement dit $\overline{z}$ solution de $2z^2-z+1=0$.

   Conclusion, si z est solution de l'équation, son conjugué l'est également.

3. $z^2-3z-4=0 \Leftrightarrow \overline{z^2-3z-4} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{z^2}-3\overline{z}-4=0$

   $\Leftrightarrow (\overline{z})^2-3\overline{z}-4=0.$

   Conclusion, si z est solution de l'équation, son conjugué l'est également.

4. Les deux solutions de l'équation $(z-i+10)(z-i-10=0)$ sont trivialement $-10+i$ et $10+i$. Elles ne sont pas conjuguées.

Exercice 13

Existe-t-il un nombre complexe dont le carré est égal à i ? Si oui, est-il unique ?

Posons $z = x + iy$.

Supposons que $z^2 = i$.

$z^2 = i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + (iy)^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 1 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$ et $xy = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x - y = 0$ et $xy = \frac{1}{2}$ **ou** $x + y = 0$ et $xy = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = y$ et $xy = \frac{1}{2}$ **ou** $x = -y$ et $xy = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = y$ et $x^2 = \frac{1}{2}$ **ou** $x = -y$ et $-x^2 = \frac{1}{2}$! Absurde car un carré est toujours positif

$\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conclusion : l'unique solution du problème est $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Exercice 14

Je suis un nombre complexe avec une partie réelle différente de ma partie imaginaire.

Si on m'élève au carré, on obtient un imaginaire pur et si on m'ajoute à ce dernier, on obtient un nombre réel.

Qui suis-je ?

Piste pour résoudre le problème...

Posons $z = x + iy$ tel que $x \neq y$.

De plus : $z^2 = ai$ et $z + ai = b$ où a et b sont deux réels.

.

.

.