Les nombres complexes

Exercice 6

Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (3i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 3i)(z + 3i) = 0$

   $\Leftrightarrow z - 3i = 0$ ou $z + 3i = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$.

   L'équation a pour solutions les nombres conjugués $-3i$ et $3i$.

2. $z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1) = 0$

   $\Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$.

   L'équation a pour solutions les nombres réels -1 et 1.

3. $(z - 2 + i)(z - 5i) = 0 \Leftrightarrow (z - 2 + i)(z - 5i) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 + i = 0$ ou $z - 5i = 0 \Leftrightarrow z = 2 - i$ ou $z = 5i$.

   L'équation a pour solutions les nombres complexes $2 - i$ et $5i$.

4. $(iz + 1)(z + 3) = 0 \Leftrightarrow (iz + 1)(z + 3) = 0$

$\Leftrightarrow iz + 1 = 0$ ou $z + 3 = 0 \Leftrightarrow iz = -1$ ou $z = -3 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i}$ ou $z = -3$

   $\Leftrightarrow z = -\frac{i}{i^2} = i$ ou $z = -3$

   L'équation a pour solutions les deux nombres -3 et i.

5. $z^2 + 2iz = 0 \Leftrightarrow z(z + 2i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z + 2i = 0$

   $\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -2i$

   L'équation a pour solutions les nombres 0 et -2i.

Exercice 7

Soit le nombre complexe suivant : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Calculons j^2, puis $1 + j + j^2$.

   $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   Donc : $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où : $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

2. Démontrons que : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

   $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

3. Déterminons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les trois racines de l'équation $x^3 = 1$.

   $x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = j$ ou ou $x = \bar{j}$.

   On sait en effet que j est solution de $x^2 + x + 1 = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$ et comme les solutions complexes d'une équation de degré 2 à coefficients réels sont conjuguées, la conclusion est logique.

Exercice 8

Soit le nombre complexe suivant : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Calculons a^2 et a^3. En déduire $1 + a + a^2 + a^3$.

   $a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1+i)^2 = \frac{1}{2}(1^2 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(2i) = i$.

   $a^3 = a^2 \times a = i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   $1 + a + a^2 + a^3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$.

2. Démontrons que $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

   $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1 = x^4 - 1$.

3. Déterminons deux solutions triviales de l'équation $x^4 = 1$.

   $x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou

   $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

   Une solution triviale est donc 1 ; l'autre solution triviale étant -1, solution évidente de l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice 9

Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations :

1. $-5z+2i=i-3 \Leftrightarrow -5z=-2i+i-3=-3-i \Leftrightarrow z=\frac{-3-i}{-5}=\frac{-3}{-5}+\frac{-i}{-5}$

$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

2. $iz-1+i=2-5i-z \Leftrightarrow z+iz=1-i+2-5i=3-6i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z(1+i)=3(1-2i) \Leftrightarrow z=3\frac{1-2i}{1+i}=3\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3\frac{1-i-2i-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=3\frac{-1-3i}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i$$

Exercice 10

Calculer les sommes suivantes.

1. $1+(1+i)+(1+3i)+\cdots+(1+2015i)=2016+i+2i+3i+\cdots+2015i$

$$=2016+(1+2+3+\cdots+2015)i=2016+\frac{2015\times 2016}{2}i$$

$$=2016+1008\times 2015i=1008(2+2015i)$$

2. $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2015}=\frac{1-i^{2016}}{1-i}=\frac{\left(1-\left(i^4\right)^{504}\right)}{1-i}=\frac{\left(1-(1)^{504}\right)}{1-i}=0$