Les nombres complexes

exercices

Exercice 1

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 25 = 0$.

Déterminons le discriminant Δ du trinôme ci-dessus.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -6^2 = (6i)^2$

Le trinôme admet les deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 6i}{2(1)} = 4 - 3i$$

et

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4 + 3i$$

Ces deux racines sont conjuguées : $z_2 = \overline{z_1}$.

En résultat, l'équation $z^2 - 8z + 25 = 0$ a pour solutions $4 - 3i$ et $4 + 3i$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\underbrace{z^3 - 4z^2 + 6z - 4}_{A} = 0 \ (E)$$

1. Montrons que 2 est solution de l'équation.

   A-t-on A = 0 pour z = 2 ?

   Pour z = 2, on a : $A = (2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$.

   Donc 2 est solution de l'équation (E).

2. Montrons que $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z - 2)(z^2 - sz + p)$.

   Posons $A = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ et $B = (z - 2)(z^2 - sz + p)$.

   $B = (z - 2)(z^2 - sz + p) = z^3 - sz^2 + pz - 2z^2 + 2sz - 2p$

   Donc : $B = z^3 - sz^2 - 2z^2 + pz + 2sz - 2p$

   D'où : $B = z^3 - (s + 2)z^2 + (p + 2s)z - 2p$

Propriété (admise)

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont deux à deux égaux.

On a : A = B. Donc les coefficients des deux polynômes $z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ et

$z^3 - (s+2)z^2 + (p+2s)z - 2p$ sont 2 à 2 égaux.

D'où : $\begin{cases} s+2=4 \\ p+2s=6 \\ 2p=4 \end{cases}$, ce qui donne : : $\begin{cases} s=4-2=2 \\ p+2s=6 \\ p=2 \end{cases}$

En résultat : s = 2 et p = 2.

Conclusion : $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

3. Résolvons l'équation (E).

$(E) \Leftrightarrow z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-2z+2) = 0 \Leftrightarrow$

$z - 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

Résolvons $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Déterminant le discriminant Δ du trinôme $z^2 - 2z + 2$.

$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$.

Les racines complexes du trinôme sont les nombres complexes conjugués $z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\bar{z}$

avec $z = \frac{-(-2)-2i}{2(1)} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{2;\ 1-i; 1+i\}$. L'équation admet une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2 + 4i + 3z = 5 - 2i \quad (E)$.

$2 + 4i + 3z = 5 - 2i \quad \Leftrightarrow 3z = 5 - 2i \ - (2 + 4i) = 5 - 2i - 2 - 4i = 3 - 6i$

$\Leftrightarrow 3z = 3 - 6i \Leftrightarrow z = \frac{3-6i}{3} = 1 - 2i$.

En résultat, l'équation (E) admet une unique solution complexe $1 - 2i$.

Exercice 4

Résolvons dans l'ensemble des réels le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -12x + 9y = 15 \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -12x + 9y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 4 \\ 8x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Conclusion : le système a pour solution le couple $\left(-\frac{3}{4};\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 5

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2z + z' = -1 + 4i \\ z - z' = 4 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z + z' = -1 + 4i \\ z - z' = 4 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z = -1 + 4i + 4 - i = 3 + 3i \\ z' = z - (4 - i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3 + 3i}{3} = 1 + i \\ z' = 1 + i - 4 + i = -3 + 2i \end{cases}$$

Conclusion : le système a pour solution le couple $(1 + i; -3 + 2i)$.