Les nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème admis et définition
Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, tel que :
— $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
— les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
— $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$.
— tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.

Définition
Soit $z \in \mathbb{C}$
— L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels, est appelée forme algébrique de z.
— x est la partie réelle de z et y est la partie imaginaire de z.
On note $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.

Remarques
z réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0$.
z imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0$
$x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.
$x + iy = a + ib \Leftrightarrow x = a$ et $y = b$.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$, avec x et y réels.
On appelle complexe conjugué de z le nombre complexe $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = x - iy$.

Propriétés
Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

z réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$$

$\overline{z^n} = \bar{z}^n$ avec n entier naturel

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ (z non nul) et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ (z' non nul)

Module d'un nombre complexe

Définition
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$ avec x et y réels.
On appelle module de z le nombre réel noté $|z|$ tel que $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Remarque : $|z|$ se lit "zed barre".

On a donc : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque : la formule ci-dessous nous rappelle la formule qui donne la distance entre un point $M(x; y)$ du plan rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et l'origine O du repère. Celle-ci nous fait entrevoir le lien existant entre complexes et géométrie.

Propriétés
Soient z et z' deux nombres complexes.

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$|z^2| = |z|^2$$

$|z^n| = |z|^n$ où n est un nombre entier

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où z' non nul

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ où z non nul