une curiosité

Dell Ferro (1465-1526), Tartaglia (1499-1577) et Cardan (1501-1576) ont, par des recherches laborieuses et controversées, abouti à la conclusion que toute équation de degré 3 qui s'exprimait sous la forme $x^3 = px - q$, où p et q étaient des nombres réels, admettait au moins une solution réelle. Ceux-ci sont même parvenu à exprimer cette solution réelle x_0 par :

$$x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

1) On considère l'équation $x^3 = -6x + 20$ (E).
Cette équation est-elle de la forme $x^3 = px + q$?

2) Montrer que l'expression de la solution x_0 associée à (E) s'écrit :

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} + \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

3) Déterminer une solution triviale de l'équation (E). Conclure.

3) Déterminer une solution triviale de l'équation (E). Conclure.

4) Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que tout polynôme de degré 3 ayant une racine x_0 se factorise sous la forme $(x - x_0)Q(x)$ où Q(x) est un polynôme de degré 2.
Factoriser $x^3 + 6x - 20$.

L'histoire de la résolution des équations cubiques (ou équations de degré 3) est un roman. Le premier à avoir résolu ce type d'équations est Scipione del Ferro. Il ne publie pas ses résultats, mais les transmet vers la fin de sa vie à son élève Fior. Celui-ci en profite pour gagner de nombreux "concours mathématiques". En 1535, l'un de ces concours l'oppose à Tartaglia. Chacun propose à l'autre 30 équations à résoudre. Fior ne sait résoudre que les équations du type $x^3+ax=bx^3+ax=b$ (rappelons qu'à l'époque, les nombres négatifs n'existent pas, et qu'il y a plusieurs types d'équations cubiques). Les équations proposées par Tartaglia sont de la forme $x^3+ax^2=b$, $x^3+ax^2=b$, et Fior ne sait en résoudre aucune. En revanche, Tartaglia (re)découvre la méthode de résolution des équations proposées par Fior (du type $x^3+ax=bx^3+ax=b$). La légende veut qu'il ait fait cette découverte la nuit précédant la date limite. Ainsi, Tartaglia gagne facilement le duel, mais il renonce au prix (30 banquets successifs). Tartaglia ne dévoile pas sa méthode, espérant gagner d'autres concours. Cependant, en 1539, Cardan le fait venir à Milan et le persuade de lui livrer son secret en échange de la protection du gouverneur de Milan. Tartaglia finit par accepter, à condition que Cardan ne révèle jamais la formule. Aidé de son élève Ferrari, Cardan trouve alors la solution de toutes les équations de degré 3, puis de degré 4. En 1543, il apprend que Scipione del Ferro avait déjà trouvé la méthode de résolution des équations du type $x^3+ax=bx^3+ax=b$, bien avant Tartaglia. Se sentant délié de sa promesse, il publie en 1545 dans Ars Magna les résultats de Scipione del Ferro, Tartaglia, Ferrari et lui-même, sans oublier de préciser à qui sont dus ces résultats. Malgré cela, Tartaglia est fou de colère. Les invectives entre les deux camps sont nombreuses, et le point culminant de la dispute est l'organisation d'un débat en 1548 opposant Tartaglia à Ferrari. Ce dernier en sort vainqueur, et Tartaglia perd le poste de professeur qu'il venait d'obtenir à Brescia. Au contraire, Ferrari devient reconnu et peut accéder à des postes lucratifs !