équations et géométrie

Équations du second degré

Considérons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a est non nul.

1. Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre une équation de la forme $x^2 = mx + p$ où l'on exprimera m et p en fonction des coefficients du trinôme $ax^2 + bx + c$.
2. On considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = mx + p$.
   2.1. Quelle est la nature de ses fonctions ?
   2.2. Quelles sont les représentations graphiques de ces fonctions ?
   2.3. Quelles sont les équations des courbes (C_f) et (C_g) représentatives de ces deux fonctions ?
   2.4. Soit $M(x; y)$ un point du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Supposons que M soit un point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g).
   Que peut-on écrire des coordonnées du point M ?
   2.5. Interpréter graphiquement $x^2 = mx + p$.
3. A l'aide de GeoGebra, résoudre graphiquement les équations :
   3.1. $x^2 = 4$
   3.2. $x^2 = 2x - 1$
   3.3. $x^2 = -x + 2$
   3.4. $x^2 = \frac{1}{2}x - 1$

Une équation particulière du troisième degré

Considérons l'équation $x^3 + px + q = 0$.

1. A l'aide de GeoGebra, représenter la fonction cube que l'on notera f et la fonction affine g définie par $g(x) = -px - q$ où p et q seront créés à l'aide d'un curseur variant de -10 à 10 avec un incrément de 0,1.
2. Interpréter graphiquement l'équation $x^3 = -px - q$.
3. Faire varier les coefficients p et q et discuter le nombre de solutions réelles de l'équation $x^3 = -px - q$.
4. Conclure.

Équation du troisième degré

Considérons l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

1. Démontrer que résoudre l'équation ci-dessus revient à résoudre l'équation

   $X^3 + pX + q = 0$ où $X = x + \frac{a}{3}$.

   On exprimera les coefficients p et q en fonction des coefficients a, b et c.

2. Pourquoi toute équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet-elle au moins une solution réelle ?

Approfondissement

Considérons l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (E) où a est non nul.

On pose $X = x - \frac{b}{2a}$.

1. Montrer que résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Quand l'équation (E) admet-elle deux solutions réelles ?
3. Exprimer les solutions réelles de (E) en fonction des coefficients a, b et c du trinôme $ax^2 + bx + c$.
4. Exprimer les solutions complexes conjuguées de (E) en fonction des coefficients a, b et c du trinôme $ax^2 + bx + c$.
5. Que peut-on dire quand $\Delta = 0$?