Les nombres complexes

Il semble que les équations du second degré étaient d'ores et déjà connues depuis l'ère babylonienne, soit 2000 ans avant J.C. comme en atteste la découverte de tablettes cunéiformes en Mésopotamie. Mais l'ancienneté des méthodes de résolution d'équations du second degré est particulièrement manifeste dans l'Al-Jabr de Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi daté d'environ 800 ans après J. C.

Il faut attendre le XVIème siècle et les travaux de Niccoló Fontana dit TARTAGLIA ou de Girolamo CARDANO dit CARDAN pour observer des progrès dans la résolution d'équations plus complexes, en particulier de degrés 3 et 4 ; et c'est à travers la recherche des solutions des équations de degré 3 que les nombres complexes ont fait leur toute première apparition dans l'histoire des mathématiques. En 1545, dans son œuvre intitulée Ars Magna ou Artis magnae sive regulis algebraicus, le mathématicien CARDAN, né à Pavie le 24 septembre 1501 et mort à Rome le 21 septembre 1576, introduit une expression qui contient la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle *sophistiqué*. Le mathématicien Niccolo Fontana dit TARTAGLIA ("Le Bègue"), né à Bescia en 1499 et mort à Venise en 1557, connaissait les résultats publiés par CARDAN dès 1535 mais avait choisi de les conserver secrets. Il est aujourd'hui admis que CARDAN a bel et bien spolié les travaux précurseurs de TARTAGLIA.

Je vous jure par les Saints Evangiles,» affirma solennellement Cardan, «*Je vous en réponds sur mon honneur, de ne jamais publier votre découverte si vous me la révélez, mais je vous promets aussi, que ma conscience de chrétien vous en soit garante, de la chiffrer de telle façon qu'après ma mort, nul ne puisse lire ce que j'aurai écrit.*» Un an plus tard, Cardan publiera la méthode, sous son nom, dans son ouvrage *Ars Magna* (1545) !

CARDAN dévoile en particulier une formule qui permet de calculer la solution réelle d'une équation de degré 3. Ainsi, par exemple, il démontre que l'équation $x^3 + 6x - 20 = 0$ admet pour seule solution réelle le nombre : $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$.
Attendu que le nombre 2 est seule solution réelle de l'équation, il advient étonnamment que :

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2$$

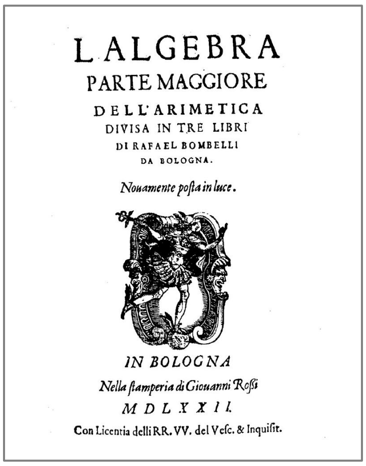
D'autres mathématiciens tels que SCPIONE DEL FERRO et LODOVICO FERRARI ont joué un rôle important dans le succès de ces nombres sophistiqués mais c'est au mathématicien Raphäel BOMBELLI, né à Bologne en 1526 et mort en 1572, que revient la mise en place de règles de calcul sur ces quantités dénommées tout d'abord *impossibles*, puis *imaginaires*. Il publie l'Algebra, ouvrage majeur dans la genèse des nombres complexes.

Les progrès dans la résolution des équations algébriques sont demeurés limités par la nature du langage utilisé pour le calcul. Ainsi pour l'équation $x^2 + 2x = 48$, CARDAN écrivait l'expression quelque peu ésotérique : 1. quad. p : 2 pos. aeq. 48.
Il aura fallu l'introduction par François VIETE (1540-1603) des lettres alphabétiques pour désigner les variables, l'acceptation des signes + et - apparus au XVème siècle en Allemagne mais seulement répandus au XVIIème siècle et l'apparition du symbole d'égalité = en 1557 (au détriment du symbole $\propto$ utilisé par DESCARTES pour observer l'apparition d'équations algébriques formulées telles que nous les connaissons.

CARDAN

TARTAGLIA

BOMBELLI



L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente posta in luce.

IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Les nombres complexes sont nés de confrontations avec des opérations impossibles comme les racines carrées de nombres négatifs.

Étudiant l'équation du second degré x(10 - x) = 40, CARDAN exprime les solutions sous la forme : 5. p. Px. m. 15 et 5. m. Px. m. 15, que l'on peut lire : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.

Et fait observer que le produit des racines est égal à 40 tout en reconnaissant que l'équation est, en théorie, impossible à résoudre.

Un siècle après leur naissance, les quantités imaginaires commencent à être utilisées par de nombreux mathématiciens. A cette époque, un nombre imaginaire se note $a + \sqrt{-b}$.

La notation rigoureuse diffusée par BOMBELLI pour $\sqrt{-1}$, à savoir "piu di meno R.q. 1", et qui permettait de calculer sans erreur $\sqrt{-1} \times \sqrt{-4}$, s'est effacée devant la notation symbolique de VIETE et DESCARTES avec l'émergence d'erreurs autrefois évitées comme sous la plume du grand mathématicien Leonhard EULER (né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783) où $\sqrt{-1} \times \sqrt{-4} = \sqrt{4}$ = 2 alors que le résultat correct est -2.

Les nombres complexes gagnent leurs lettres de noblesse grâce à Carl Friedrich GAUSS, mathématicien allemand né à Brunswick le 30 avril 1777 et mort à Göttingen le 23 février 1855, qui popularise dès 1801 dans ses Disquisitiones arithmeticae l'utilisation du symbole "i", introduit par EULER, pour $\sqrt{-1}$. Il nommera ce symbole "unité imaginaire". C'est aussi dans cet ouvrage qu'il rebaptise les nombres imaginaires en nombres complexes.

- Extrait de publication mathématique utilisant les nombres complexes

224. [M^1. 8. g.] *A curious imaginary curve.*

The curve $$(x+iy)^2=\lambda(x-iy)$$
is (i) a parabola, (ii) a rectangular hyperbola, and (iii) an equiangular spiral. The first two statements are evidently true. The polar equation is
$$r=\lambda e^{-3i\theta},$$
the equation of an equiangular spiral. The intrinsic equation is easily found to be $\rho=3is$.

It is instructive (i) to show that the equation of any curve which is both a parabola and a rectangular hyperbola can be put in the form given above, or in the form
$$(x+iy)^2=x \text{ (or } y),$$
and (ii) to determine the intrinsic equation directly from one of the latter forms of the Cartesian equation. G. H. Hardy.

• Le nombre i dans l'identité d'EULER, mentionnée comme la plus remarquable des équations mathématiques par Richard FEYNMAN, illustre physicien américain et remarquable pédagogue et vulgarisateur.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Richard FEYNMAN (1918 - 1988)