

Problème sur les nombres complexes

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.*