calcul matriciel

1. Multiplication d'une matrice colonne 2 × 1 par un réel

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où x et y sont des réels quelconques. Lorsqu'on multiplie la matrice colonne 2 × 1 X par un réel λ, on obtient la matrice colonne telle que ci-dessous :

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 1</u>

Soient $X = \begin{pmatrix} -18 \\ 27 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices X' et Y' telles que $X' = -\frac{1}{9}X$ et $Y' = 7Y$.

2. Multiplication d'une matrice 2 × 2 par un réel

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques. Lorsqu'on multiplie la matrice A par un réel λ, on obtient la matrice 2 × 2 telle que ci-dessous :

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices C et D telles que $C = \frac{1}{9}A$ et $D = 4B$.

3. Addition de matrices 2 × 1

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients réels quelconques. Lorsqu'on additionne la matrice X à la matrice X', on obtient la matrice 2 × 1 telle que ci-dessous :

$$X + X' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

Cette addition nous est familière puisque qu'elle nous rappelle l'addition vectorielle.

On remarque que l'addition est une opération commutative et associative.

4. Addition de matrices 2×2

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices carrées à coefficients réels quelconques.

Lorsqu'on additionne la matrice A à la matrice B, on obtient la matrice 2×2 telle que ci-dessous :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trois matrices carrées.

1. Démontrer que A + B = B + A. Que peut-on conjecturer quant à la commutativité de l'addition ?
2. Démontrer A + (B + C) = (A + B) + C. Que peut-on conjecturer quant à l'associativité ?

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices carrées à coefficients réels quelconques.

1. Démontrer que l'addition de deux matrices carrées est commutative, c'est-dire que $A + B = B + A$.
2. Démontrer que l'addition de deux matrices carrées est associative, , c'est-dire que :

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

5. Combinaison linéaire de deux matrices 2×1

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients réels quelconques et λ et μ deux réels. On a :

$$\lambda X + \mu X' = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soient $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ trois matrices colonnes.

1. Calculer $2X + Y$.
2. Calculer 3X+2Y+Z.

6. Combinaison linéaire de deux matrices 2×2

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices carrées à coefficients réels quelconques et λ et μ deux réels. On a :

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 6</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trois matrices carrées.

1. Calculer $6A - B$.

2. Calculer 2A + B - 3C.