Déterminant et matrice inverse

Exercice 1

Soient les matrices A, X et Y avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. On a : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2)+1(3) \\ 2(2)+1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, donc : AX = B.
2. Calculons dét(A).

   $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 1(2) = 1.$
3. Déterminons la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

   On a : $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. Déterminons les matrices suivantes lorsque possible :

   $A^{-1}AX = I_2X = X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $AXA^{-1} = BA^{-1}$, B étant une matrice 2 × 1 et A^{-1} une matrice 2 × 2, la multiplication est impossible.

   $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-7 \\ -2(9)+3(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   BA^{-1}, B étant une matrice 2 × 1 et A^{-1} une matrice 2 × 2, la multiplication est impossible.

5. Parmi les égalités ci-dessous, seule l'égalité (3) a du sens, les autres sont soit fausses, soit absurdes.

   La (4) est vraie du point de vue des règles de la multiplication matricielle, mais les produits ici ne sont pas définis (c.f. question 4), elle est donc absurde.

$$A\ X\ A^{-1} = A^{-1}\ B \qquad (1)$$
$$A^{-1}\ A\ X = B\ A^{-1} \qquad (2)$$
$$A^{-1}\ A\ X = A^{-1}B \qquad (3)$$
$$A\ X\ A^{-1} = B\ A^{-1} \qquad (4)$$

6. L'expression (3) ci-dessus permet d'obtenir X à partir de A et B.

   AX = B $\Leftrightarrow\ A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow I_2 \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Exercice 2

On considère les matrices à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer le lemme suivant : $\text{dét}(AB) = \text{dét}(A) \times \text{dét}(B)$.

   Pour une matrice d'ordre 2, nous avons démontré ce résultat en activité.

2. L'assertion : $AB = I_2 \Rightarrow BA = I_2$ est-elle vraie ?

   $AB = I_2 \Rightarrow \det(AB) = \det(I_2) \Rightarrow \det(A) \times \det(B) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ A est inversible

   $\Rightarrow$ Il existe une matrice C telle que $AC = CA = I_2 \Rightarrow C(AB) = CI_2 \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow (I_2)B = C \Rightarrow B = C \Rightarrow BA = CA \Rightarrow BA = I_2$.