exercices sur les matrices (suite)

Exercice 6

1. Résolvons le système (S) $\begin{cases} 2x = a \\ x + 3y = b \\ -x + y - 2z = c \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} + 3y = b \\ -\frac{a}{2} + y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ 3y = b - \frac{a}{2} \\ -2z = c + \frac{a}{2} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ -2z = c + \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ -2z = c + \frac{a}{2} - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ -2z = c + \frac{3a}{6} - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ -2z = c + \frac{4a}{6} - \frac{1}{3}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ -2z = c + \frac{2a}{3} - \frac{1}{3}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right) \\ z = -\frac{1}{2}c - \frac{a}{3} + \frac{1}{6}b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{6} + \frac{1}{3}b \\ z = -\frac{a}{3} + \frac{1}{6}b - \frac{1}{2}c \end{cases}$$

2. D'après l'énoncé, on a : AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Or, d'après le 1., on a : $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = CB$ avec $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

D'où : X = CB = C(AX) = (CA)X.
Ainsi : CA = I_3.

De même : AX = B, donc : A(CB) = B et (AC)B = B, ce qui implique que : AC = I_3.

Conclusion : AC = CA = I3.

La matrice A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. La matrice A est une matrice triangulaire inférieure.
   Cette spécificité facilite la détermination de son inverse.

Calcul à la calculatrice de A^{-1}.