exercices sur les matrices (suite)

Exercice 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I_3.$$

1. Calculer les matrices B^2 et B^3.

2. Établir, pour $n \geqslant 3$, que : $A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$.

3. En déduire A^n.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B = A - I3.

1. Calculons B^2 et B^3.

   On a : B = A - I3 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   D'où : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Et : $B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$. Matrice nulle d'ordre 3.

2. D'après la question 1., pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $B^n = O_3$.

   Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

   Par extension, on a : $A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {I_3}^{n-k} B^k = \binom{n}{0} {I_3}^{n} B^0 + \binom{n}{1} {I_3}^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} {I_3}^{n-2} B^2$

   car les termes suivants comportent B^n avec $n \geq 3$, or dans ces cas $B^n = O_3$.

   Or : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, d'où : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n)!0!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$,

   D'où : $A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

   Dans la résolution de cette question ont été réinvestis tous les savoirs étudiés autour de la loi binomiale, des coefficients binomiaux et de la formule de Newton en première et terminale.

   Une autre résolution, par récurrence celle-ci, est aisée pour les élèves qui ne maîtriseraient pas les notions abordées.

3. Déterminons A^n.

   On a : : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   D'où : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n-1)}{2} + n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.