déterminant et matrice inverse

Exercice 1

On considère les matrices A, X et B avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et exprimer le résultat obtenu à l'aide des matrices de l'énoncé.
2. On note dét(A) le déterminant de la matrice A. Calculer dét(A).
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.
4. Déterminer les matrices suivantes lorsque possible :

   $A^{-1}AX$ $\qquad$ AXA^{-1} $\qquad$ $A^{-1}B$ $\qquad$ BA^{-1}

5. Parmi les égalités ci-dessous, une seule est vraie. Laquelle ?

$$AXA^{-1} = A^{-1}B \qquad (1)$$

$$A^{-1}AX = BA^{-1} \qquad (2)$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad (3)$$

$$AXA^{-1} = BA^{-1} \qquad (4)$$

6. Laquelle des quatre expressions ci-dessus permet d'obtenir X à partir de A et B ?

Exercice 2

On considère les matrices à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer le lemme : dét(AB) = dét(A) × dét(B).

2. L'assertion : $AB = I_2 \Longrightarrow BA = I_2$ est-elle vraie ?

Exercice 3

On considère les matrices A et B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le produit AB.

2. En déduire que A est inversible et en déduire son inverse.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire A^{-1}.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2A + I_2$.
2. Démontrer que $A(A - 2I_2) = (A - 2I_2)A = I_2$.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.