Matrices inverses

La rédaction se doit d'être concise mais doit invariablement comporter les hypothèses.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminons le produit AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)-1(-5) & 1(1)-1(1) \\ 5(1)+1(-5) & 5(1)+1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$$

2. Déterminons A^{-1}.

Posons $C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}B$. On a alors : $AC = A \times \frac{1}{6}B = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}6I_2 = I_2$.

D'après l'exercice 2, $AC = I_2 \Rightarrow CA = I_2$, donc ici : $AC = CA = I_2$.

<u>Conclusion</u> : La matrice C où $C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A qui est par conséquent inversible.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons A^2, A^3 et A^4, puis déterminons A^{-1}.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

En posant $C = A^3$, on a : $AC = I_2$, d'où : $AC = CA = I_2$ (d'après l'exercice 2) et C est la matrice inverse de la matrice A.

<u>Conclusion</u> : A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculons A^2 et montrons que $A^2 = 2A + I_2$.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Or : $2A + I_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $A^2 = 2A + I_2$.

2. Montrons que $A(A - 2I_2) = (A - 2I_2)A = I_2$.

   On a, d'après la question 1, $A^2 = 2A + I_2$. Donc : $A^2 - 2A = I_2$.

   D'où : $A(A - 2I_2) = I_2$

   D'après l'exercice 2, $AB = I_2$ implique $BA = I_2$.

   Conclusion : $A(A - 2I_2) = (A - 2I_2)A = I_2$

3. Montrons que A est inversible et déterminons A^{-1}.

   D'après la question 2, A est inversible et sa matrice inverse est la matrice $A^{-1} = A - 2I_2$.