Produit matriciel

Définition

On appelle matrice n × p un tableau de coefficients comportant n lignes et p colonnes. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux matrices carrées 2 × 2 (2 lignes, 2 colonnes) et aux matrices appelées matrices colonnes 2 × 1 (2 lignes, 1 colonne) telles que, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices s'obtient en multipliant les coefficients de chaque ligne de la première matrice par les coefficients de chaque colonne de la seconde matrice.

Lorsqu'on multiplie, dans cet ordre, deux matrices A et B carrées 2 × 2, on obtient une matrice P carrée 2 × 2 telle que P = AB, dont les coefficients sont obtenus selon la règle suivante :

Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice P est obtenu en multipliant les coefficients de la ligne i de la matrice A par les coefficients de la colonne j de la matrice B, i et j allant de 1 à 2.

<u>Exercice 1</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, BA, AC, CA, BC et CB.
2. Vérifier à l'aide de la calculatrice les résultats obtenus.
3. La multiplication matricielle est-elle commutative ?

Matrice identité

On appelle matrice identité 2 × 2 la matrice suivante : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 2</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques.

1. Calculer IA et AI. Qu'observe-t-on ?
2. Calculer IB et BI. Conclusion ?

<u>Exercice 3</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX.
2. Établir une relation entre A, X et Y.

3. De quelle équation matricielle la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-elle solution ?

Associativité

Une loi de composition $*$ ou "opération" définie sur un ensemble d'éléments est dite associative si et seulement si, pour tous éléments a, b et c de l'ensemble, on a : $a * (b * c) = (a * b) * c$.

<u>Exercice 4</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer BC, puis A(BC).
2. Calculer AB, puis (AB)C.
3. Que peut-on conjecturer ?

Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée 2 × 2.

On note A^2 le produit de la matrice A par la matrice A.

On note A^3 le produit de la matrice A par la matrice A par la matrice A.

On note A^n le produit n fois de la matrice A par la matrice A.

<u>Exercice 5</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n et A.
2. Calculer B^2, B^3 et B^4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

<u>Exercice 6</u> - **Égalité de matrices**

Soit X et Y deux matrices colonnes 2 × 1 et A une matrice carrée 2 × 2.

On note : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Démontrer que : $X = Y \Longrightarrow AX = AY$.

<u>Exercice 7</u> - **Égalité de matrices**

Soit X et Y deux matrices telles que $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $AX = Y$.
2. Soit $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que BA = I.

3. On a démontré que AX = Y à la question 1. Que peut-on dire des produits matriciels BAX et BY en vertu du résultat de l'exercice 6 ?

4. Calculer BAX et BY. Le résultat est-il cohérent ?

Exercice 8 - **Résolution d'une équation matricielle**

Soit X et Y deux matrices telles que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On souhaite résoudre l'équation matricielle : $AX = Y$.

Soit $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que BA = I.
3. Montrer que $X = BY$
4. En déduire X.