

Propriétés des matrices

1. Multiplication d'une matrice par un réel

Soient A et B deux matrices d'ordre n et λ réel :

$$\begin{aligned}\lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \\ \lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B)\end{aligned}$$

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices : $2(A + B)$, $2A + 2B$, $2(AB)$, $(2A)B$ et $A(2B)$.

2. Distributivité de la multiplication matricielle.

Soient A , B et C trois matrices d'ordre n :

$$\begin{aligned}C(A + B) &= CA + CB \\ (A + B)C &= AC + BC \\ (A + B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ (A + I)^2 &= A^2 + 2A + I\end{aligned}$$

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices :

1. $C(A + B)$
2. $CA + CB$
3. $(A + B)C$
4. $AC + BC$
5. $(A + C)^2$
6. $A^2 + 2AC + C$
7. $(B + I)^2$
8. $B^2 + 2B + I$