systèmes linéaires et matrices

1. Position du problème

L'objectif proposé est de résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ tel que ci-dessous :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Maitrisant parfaitement la multiplication des matrices, il est aisé de voir que ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

AX = Y

avec : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \square & & \\ & \cdots & & \\ & \square & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \square \\ \cdots \\ \square \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \square \\ \cdots \\ \square \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. État des lieux

1. Nous savons additionner deux matrices A et B de même taille, autrement dit calculer A + B.
2. Nous savons multiplier une matrice B par un réel quelconque, y compris -1, c'est-à-dire calculer - B, matrice opposée de la matrice B.
   D'où la possibilité de soustraire une matrice B à une matrice A en posant : A - B = A + (- B).
3. Nous savons multiplier dans cet ordre deux matrices A et B de tailles respectives m × n et n × p. Le résultat étant une matrice notée A × B ou AB de taille m × p. La multiplication des matrices n'étant pas commutative, nous savons que généralement : A × B ≠ B × A.
4. Considérant une matrice carrée A d'ordre n, nous savons dans certains cas déterminer une matrice notée A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$; cette matrice étant appelée matrice inverse de la matrice A.
   Dans le cas où n = 2, nous savons déterminer si une matrice A possède une matrice inverse et nous savons en déterminer les quatre coefficients.

3. Résolution d'une équation de la forme ax = b

Considérons l'équation générale ax = b où a et b sont deux réels (a supposé non nul), x indiquant une inconnue. Vouloir résoudre cette équation revient à s'interroger sur la valeur à attribuer à l'inconnue x pour que l'assertion ax = b soit vraie.

Exemple

Considérons le cas de l'équation 2x = 7.
Pour x = 3, l'assertion consistant à affirmer que 2x est égal à 7 est fausse. Donc, 3 n'est pas solution de l'équation.
Pour x = 3,5, le membre à gauche de l'égalité et le membre à droite de l'égalité ont tous deux pour valeur 7. L'assertion est vraie. 3,5 est donc solution de l'équation.

Comment résoudre algébriquement l'équation ax = b ?

Des "machines" pour construire et déconstruire l'expression algébrique ax.
Résolution de l'équation ax = b.

Pour déterminer l'inconnue x, il convient, afin de préserver la véracité de l'assertion ax = b, de diviser le membre à gauche de l'égalité et le membre à droite de l'égalité par le même nombre réel non nul a, d'où l'expression x = $\frac{b}{a}$.

Or, nous savons que "diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse", l'inverse du réel non nul a étant $\frac{1}{a}$.

Pour résoudre l'équation ax = b, on multipliera donc les membres situés à gauche et à droite de l'égalité par l'inverse du réel non nul a :

$$ax = b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \times (ax) = \frac{1}{a} \times (b) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \times a\right) \times x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow (1) \times x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

On remarquera ici que : $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a}$ et que : $\frac{1}{a} \times b = b \times \frac{1}{a}$, la multiplication étant une opération commutative sur l'ensembles des réels.

Nous aurions pu tout aussi bien écrire :

$$ax = b \Leftrightarrow (ax) \times \frac{1}{a} = b \times \frac{1}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \times a\right) \times x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

4. Résolution de l'équation matricielle AX = Y

Considérons l'équation matricielle AX = Y, A étant une matrice carrée d'ordre n, X et Y étant deux matrices colonnes de taille n × 1.

Comment faire pour résoudre une telle équation et déterminer la matrice X ?

Par analogie avec l'exemple examiné ci-avant dans le cas de nombres réels, puisque nous ne savons pas diviser des matrices, comment ne pas penser en revanche à multiplier les membres situés à gauche et à droite de l'égalité par l'inverse de la matrice A lorsque cet inverse, noté A^{-1}, existe ?

Mais attention car, cette fois, la multiplication de deux matrices n'est pas commutative !

En multipliant à gauche par A^{-1} les deux membres de l'égalité, on obtient en particulier :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1} B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1} B \Leftrightarrow (I_n)X = A^{-1} B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

Ainsi, lorsque la matrice A est inversible, l'équation matricielle AX = B est équivalente à :

$$X = A^{-1} B$$

D'où la résolution de l'équation.

En multipliant à droite par A^{-1} les deux membres de l'égalité, on obtiendrait :

$AX = B \Leftrightarrow (AX)A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow AXA^{-1} = A^{-1} B$, démarche n'aboutissant pas à la détermination de X.

Enfin, si l'on multipliait n'importe comment les membres situés à gauche et à droite de l'égalité, il serait faux d'écrire :

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = BA^{-1}$$

ou encore :

$$AX = B \iff (AX)A^{-1} = A^{-1}B$$

car nous aurions alors supposé à tort que la multiplication matricielle est commutative !