Trace et valeurs propres d'une matrice

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul et la matrice identité I carrée d'ordre 2.

Notation : det(A) = ad - bc est appelé déterminant de la matrice A.

tr(A) = a + d est appelé trace de la matrice M.

det(A-λI) est appelé polynôme caractéristique de la matrice A.

PARTIE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ supposé non nul et la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On notera $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer tr(A), det(A), ainsi que le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle inversible ? Déterminer A^{-1}.
3. Démontrer que $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$, X non nul, λ réel non nul.
4. Démontrer que $(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (5-\lambda)x - 3y = 0 \\ 6x + (-6-\lambda)y = 0 \end{cases}$, x et y non tous deux nuls.
5. Démontrer que : $\begin{cases} (5-\lambda)x - 3y = 0 \\ 6x + (-6-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-\lambda)x = 3y \\ \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \end{cases}$.
6. Déterminer les racines, si elles existent, du polynôme $\lambda^2 + \lambda - 12$.
7. Démontrer que $(A + 4I)(A - 3I) = 0$
8. En déduire que $A^2 - tr(A)A + det(A)I = 0$.
9. Montrer que $AB = I \implies B = \frac{1}{12}(A + I)$.
10. Montrer que $B = \frac{1}{12}(A + I) \implies AB = I$.
11. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

D'après les questions précédentes, on a : $AX = \lambda X \Leftrightarrow \lambda = -4$ ou $\lambda = 3$.

12. Résoudre l'équation matricielle $AX = 3X$.
13. Résoudre $AX = -4X$.
14. Modéliser la situation à l'aide de GeoGebra.

PARTIE 2

La bibliothèque ou module numpy permet de manipuler en langage Python des objets de type array ou matrice. Pour pouvoir utiliser les instructions de cette bibliothèque, il convient tout d'abord de l'importer sous Python, quelques instructions utiles étant ensuite présentées.

En mode console :

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[5, -3],[6, -6]]) # Crée la matrice A
>>> I = np.eye(2) # Crée la matrice identité d'ordre 2
>>> O = np.zeros((2,1)) # Crée la matrice nulle 2 lignes 1, colonne
>>> O = np.ones((2,2)) # Crée la matrice d'ordre 2 de coefficients tous égaux à 1
>>> O = np.full((2,2), 5) # Crée la matrice d'ordre 2 de coefficients tous égaux à 5
>>> R = np.random.ranint(a, b, (2,2)) # Crée la matrice d'ordre 2 de coefficients aléatoires
entiers entre a et b.
>>> A@A # Produit matriciel de A par A
>>> A_inv = np.linalg.inv(A) # Crée la matrice inverse de la matrice A
>>> det_A = np.linalg.det(A) # Calcule le déterminant de la matrice A
>>> eig_vals, eig_vecs = np.linalg.eig(A) # Calcule les valeurs propres et vecteurs propres de la
matrice A
```

Tester les instructions ci-dessus.

PARTIE 3

On supposera det(A) ≠ 0.

1. Démontrer que $AX = \lambda X \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A) = 0$.
   Les racines du trinôme, si elles existent, sont appelées valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer que $A^2 - tr(A)A + det(A)I = 0$.
3. Démontrer que la matrice $B = \frac{1}{det(A)}(A - tr(A)I)$ est l'inverse de la matrice A.