Somme $1 + 2 + 3 + \ldots$

Une somme aussi simple que 1 + 2 + 3 + ... + n peut-elle s'avérer source d'étonnement ?

+ intérêt heuristique
Pistes de recherche
Le calcul d'une somme aussi simple que 1 + 2 + 3 + ... présente un intérêt heuristique étonnant.

L'heuristique ou euristique (du grec ancien εὑρίσκω, heuriskô, « je trouve ») est « l'art d'inventer, de faire des découvertes » en résolvant des problèmes à partir de connaissances incomplètes. Ce type d'analyse permet d'aboutir en un temps limité à des solutions acceptables.

L'adjectif ***heuristique*** qualifie ce qui **aide à la recherche**, à la découverte des faits ou des théories, ainsi que ce qui tend à trouver.

Une **hypothèse heuristique** est une hypothèse choisie provisoirement comme idée directrice indépendamment de sa vérité absolue.

Anecdote autour du mathématicien GAUSS qui serait parvenu à calculer une somme de la forme 1 + 2 + 3 + ... + 50 en pensant à la disposition triangulaire de cailloux rangés en 50 lignes, formant avec la même disposition retournée un rectangle de 50 lignes par 51 colonnes, d'où le résultat égal à 50 × 51 : 2.
Qui était GAUSS ? Recherche à faire autour de l'anecdote mentionnée.
Faire un dessin des cailloux disposés et le présenter au jury.

Anecdote sur la nécessité de ne jamais hésiter à aborder un problème algébrique en le prenant par les deux bouts : s = 1 + 2 + ... + n et s = n + .. 2 + 1, d'où 2S = n(n + 1) et S = n(n + 1)/2.
N'importe qui peut le comprendre...

Le calcul de la somme 1 + 2 + ... + n a été abordé de multiples manières et s'est retrouvé en classe de première à travers l'étude des suites arithmétiques de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$ et le calcul de la somme des (n+1) premiers termes d'une telle suite.
Rappeler que pour une suite de raison u_0 et de raison r ladite somme est $(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$ avec $u_n = u_0 + nr$.
La somme 1 + 2 + ... + n est alors égale à la somme de n valeurs toutes égales à la moyennes $\frac{n+1}{2}$ des termes de ladite somme.

Le calcul de la somme 1 + 2 + ... + n s'est condensé en l'écriture symbolique $\sum_{k=0}^{n} k$ et cette écriture est une merveille de concision. Sigma étant appelé symbole de sommation discrète.

Une manière inattendue de calculer cette somme se dévoile lorsque l'on joue avec les nombres... et les identités remarquables et les coefficients binomiaux (c.f. triangle de Pascal).
En effet : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Donc : $(0+1)^2 = 0^2 + 2(0)(1) + 1^2$
$(1+1)^2 = 1^2 + 2(1)(1) + 1^2$
$(2+1)^2 = 2^2 + 2(2)(1) + 1^2$
$(3+1)^2 = 3^2 + 2(3)(1) + 1^2$
...
$(n+1)^2 = n^2 + 2(n)(1) + 1^2$
En ajoutant tous les termes ci-dessus, on obtient : $(n+1)^2 = 2(1+2+3+\ldots+n) + (n+1)$
Ce qui permet de déduire la valeur de $1+2+3+\ldots+n$

D'une manière étonnante, un nouveau type de raisonnement appelé démonstration par récurrence, permet de démontrer la propriété $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ en classe de terminale.

La classe de terminale et la découverte des polynômes de Bernoulli qui n'est pas une nouille ! mais un grand mathématicien (ils sont deux frères), permet non seulement de calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ mais toutes les sommes de la forme $\sum_{k=0}^{n} k^p$ où p entier naturel. Travail de recherche autour de Bernoulli.
Ces polynômes sont définis par... et notre étonnement semble inépuisable en dépit de la simplicité de la propriété. Un sujet pour les enthousiastes capables de communiquer leur passion !

Elle est pas belle la vie ? Kurt VONNEGUT