Dossier : Méthodologie et dérivation (1)

1. Position du problème

Un problème récurrent auquel nous nous trouverons souvent confrontés en première scientifique sera celui de la détermination de la dérivée d'une fonction f. Concrètement... que signifiera pour nous dériver une fonction f ?
– Dériver une fonction f consistera en fait simplement à exprimer f '(x) en fonction de x à partir de la définition explicite de la fonction f, c'est-à-dire à partir de l'expression de f(x) en fonction de la variable x.

2. Dérivation des fonctions usuelles

Trois règles sont à mémoriser pour dériver les fonctions les plus simples...

Règle 1 $\left(ku(x)\right)' = ku'(x)$
Règle 2 $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$
Règle 3 $(x^n)' = nx^{n-1}$

Application

Déterminons f '(x) dans chaque cas mentionné ci-dessous :

On suppose : f(x) = 3x + 2, donc : f '(x) = 3.

On suppose : f(x) = x^2 + 5x, donc : f '(x) = 2x + 5.

On suppose : g(x) = $3x^2$ + 2, donc : f '(x) = 3(2x) = 6x.

On suppose : f(x) = $-5x^2$ + 4x - 6, donc : f '(x) = -5(2x) + 4 = -10x + 4.

On suppose : f(x) = $x^3 - x^2$ + 2x, donc : f '(x) = $3x^2$ - 2x + 2.

On suppose : f(x) = $2x^3$ + 5x, donc : f '(x) = 2($3x^2$) + 5 = $6x^2$ + 5.

On suppose : f(x) = $-5x^3 + 6x^2$ + 3x + 1, donc : f '(x) = -5($3x^2$) + 6(2x) + 3 = $-15x^2$ + 12x + 3.

On suppose : f(x) = $3x + 4 + \frac{1}{x}$, donc : f '(x) = $3 - \frac{1}{x^2}$.

On suppose : f(x) = $-2x^2 - \frac{3}{x}$, donc : f '(x) = $-2(2x) - 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -4x + \frac{3}{x^2}$.

On suppose : f(x) = $\frac{2}{5}$(3x + 2), donc : f '(x) = $\frac{2}{5}$(3x + 2)' = $\frac{2}{5}$(3) = $\frac{6}{5}$.

On suppose : f(x) = $\frac{4}{3}$($5x^2$ + 2x), donc : f '(x) = $\frac{4}{3}$($5x^2$ + 2x)' = $\frac{4}{3}$(5(2x) + 2) = $\frac{4}{3}$(10x + 2) = $\frac{8}{3}$(5x + 1).

On suppose : f(x) = $3\sqrt{x} + 4x$, donc : f '(x) = $3\left(\sqrt{x}\right)' + 4 = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 4 = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ +4.

On suppose : f(x) = $-4\sqrt{x} + 2x + 1$, donc :

On suppose : f(x) = $\frac{1}{2}x - \sqrt{x}$, donc :

On suppose : f(x) = $x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$, donc :

On suppose : f(x) = $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3$, donc :

On suppose : f(x) = $7x^5 - 12x^3 + 9x^2$ + 100, donc :

Dossier : Méthodologie et dérivation (2)

3. Dérivation d'un produit de deux fonctions

Certaines fonctions sont définies par des produits de fonctions et ne peuvent être dérivées qu'à l'aide d'une formule de dérivation supplémentaire.

Formule de dérivation d'un produit : $\big(u(x) \times v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Application 1

On considère la fonction f définie par f(x) = (x + 1)(2x - 3). (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : f(x) = u(x) × v(x) avec u(x) = x + 1 et v(x) = 2x - 3 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 1 v'(x) = 2

Donc : $f\,'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$$f\,'(x) = (1)(2x\ -\ 3) + (2)(x+1) = 2x - 3 + 2x + 2 = 4x - 1$$

Dans le présent, il est cependant plus direct de développer f(x).
En effet : f(x) = (x + 1)(2x - 3) = $2x^2$ + 2x - 3x -3 = $2x^2$ - x -3.
D'où : f '(x) = 2(2x) - 1 = 4x - 1.

Application 2

On considère la fonction f définie par f(x) = $\frac{1}{x}(x^2 - 2)$. (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : f(x) = u(x) × v(x) avec u(x) = 1/x et v(x) = x^2 - 2 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = -1/x^2 v'(x) = 2x

Donc : $f\,'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(1x)$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$$f\,'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2 - 2) + \left(\frac{1}{x}\right)(2x) = -1 + \frac{2}{x^2} + 2 = \frac{2}{x^2} + 1$$

Application 3

On considère la fonction f définie par f(x) = x$\sqrt{x}$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : f(x) = u(x) × v(x) avec u(x) = x et v(x) = $\sqrt{x}$ (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 1 v'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc : $f\,'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$$f\,'(x) = (1)(\sqrt{x}) + (x)(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Dossier : Méthodologie et dérivation (3)

4. Dérivation d'un quotient de deux fonctions

Certaines fonctions sont définies par des quotients de fonctions. Pour les dériver, nous disposons de la formule de dérivation.

Formule de dérivation d'un quotient : $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u\prime(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{[v(x)]^2}$

Application 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec u(x) = 1 et v(x) = 2x - 3 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 0 v'(x) = 2

Donc : $f\,'(x) = \frac{u\prime(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{[v(x)]^2}$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f\,'(x) = \frac{(0)(2x-3)-(1)(2)}{(2x-3)^2} = \frac{-2}{(2x-3)^2}$ (Je substitue...)

Application 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x-1}{2x+5}$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec u(x) = 4x - 1 et v(x) = 2x + 5 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 4 v'(x) = 2

Donc : $f\,'(x) = \frac{u\prime(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{[v(x)]^2}$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f\,'(x) = \frac{(4)(2x+5)-(4x-1)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{8x+20-8x+2}{(2x+5)^2} = \frac{22}{(2x+5)^2}$ (Je substitue...)

Dossier : Méthodologie et dérivation (4)

5. Dérivation du carré d'une fonction

Il est parfois intéressant d'utiliser une formule compacte de dérivation dans le cas de la dérivation du carré d'une fonction.

Formule de dérivation d'un carré de fonction : $\left[\left(u(x)\right)^2\right]' = 2u'(x)u(x)$

Application 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3(4x-5)^2$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = 3\left(u(x)\right)^2$ avec u(x) = 4x - 5 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 4

Donc : $f'(x) = 3[2u'(x)u(x)]$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f'(x) = 3[2(4)(2x - 5)] = 24(4x - 5)$ (Je substitue...)

Application 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}(3x^2-1)^2$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = \frac{1}{3}\left(u(x)\right)^2$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$ (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 6x

Donc : $f'(x) = \frac{1}{3}[2u'(x)u(x)]$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f'(x) = \frac{1}{3}[2(6x)(3x^2 - 1)] = 4x(3x^2 - 1)$ (Je substitue...)

Dossier : Méthodologie et dérivation (5)

6. Dérivation de l'inverse d'une fonction

Il est souhaitable d'utiliser une dernière formule compacte de dérivation dans le cas de la dérivation de l'inverse d'une fonction.

Formule de dérivation de l'inverse d'une fonction : $\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \frac{-u\prime(x)}{[u(x)]^2}$

Application 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(3x-4)}$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec u(x) = 3x - 4 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 3

Donc : $f\ '(x) = \frac{-u\prime(x)}{[u(x)]^2}$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f\ '(x) = \frac{-3}{[3x-4]^2}$ (Je substitue...)

Application 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{5}{(x^2+1)}$ (Je dis ce que je sais)
Déterminons f '(x). (Je dis ce que je fais)

On a : $f(x) = 5\left(\frac{1}{u(x)}\right)$ avec u(x) = x^2 + 1 (J'identifie un produit de fonctions)
u'(x) = 2x

Donc : $f\ '(x) = 5\ \left(\frac{-u\prime(x)}{[u(x)]^2}\right)$ (J'applique la formule de dérivation au produit identifié)

$f\ '(x) = 5\frac{-2x}{[x^2+1]^2} = -\frac{10x}{[x^2+1]^2}$ (Je substitue...)