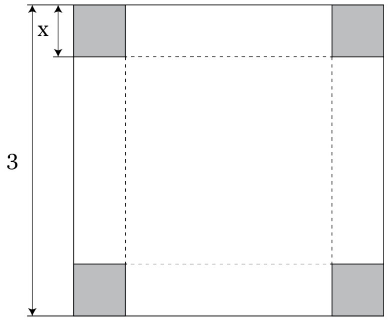
Exercice 64, page 105

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 3 m de côté.



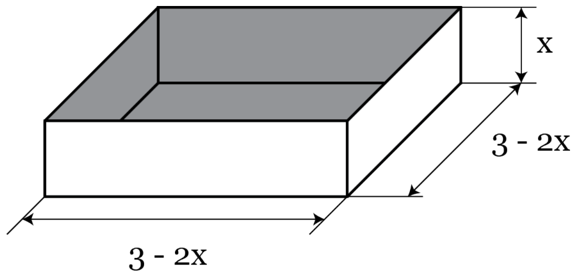


Figure 1 Figure 2

A chaque coin de cette plaque, on découpe un carré de côté x mètres. En pliant et en soudant, on obtient une cuve de volume V(x) en m³.

1.a. D'après la figure 2, on a : $x > 0$ (car x représente la hauteur de la cuve supposée non nulle), et
$3 - 2x > 0$ (longueur des côtés de la cuve strictement positive)
D'où : $3 > 2x$ et $x < 1,5$.
En conclusion : $\underline{0 < x < 1,5}$ (x est exprimé en mètres) ou $\underline{x \in [0 ; 1,5]}$.

1.b. Le volume V(x) de la cuve est donné par l'expression (voir figure 2) :

$$V(x) = (3 - 2x)(3 - 2x)x = x(3 - 2x)^2$$

2.a. Étudions les variations de la fonction V définie sur [0 ; 1,5] par $V(x) = x(3 - 2x)^2$.

On a : $V(x) = u(x)v(x)$ avec : $u(x) = x$ et $v(x) = (3 - 2x)^2$.
$u'(x) = 1$ $v'(x) = 2(3 - 2x)(-2) = -4(3 - 2x)$

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } V'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
&= (1)(3 - 2x)^2 + x(-4(3 - 2x))\\
&=(3 - 2x)^2 + (3 -2x)(-4x)\\
&=(3 - 2x)(3 - 2x -4x)\\
&=(3 - 2x)(3 - 6x)\\
&=3(-2x + 1)(-2x + 3)\\
&=3(2x - 1)(2x - 3)
\end{aligned}$$

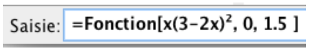
Étudions le signe de V'(x) sur [0 ; 1,5] à l'aide d'un tableau de signe.

x	0		0,5		1,5
2x - 1	‖	-	0	+	‖
2x - 3	‖	-		-	0
3(2x - 1)(2x - 3)	‖	+	0	-	‖

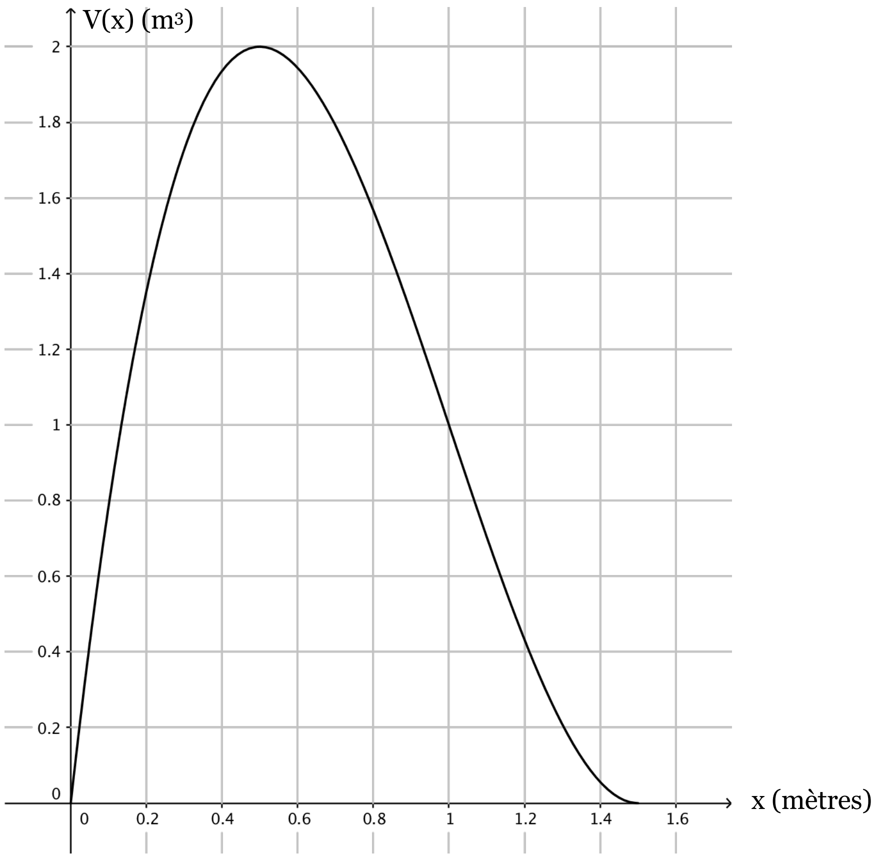
Tableau de variations de V sur [0 ; 1,5].

x	0		0,5		1,5
Signe de V'(x)	‖	+	0	-	‖
V(x)	‖	↗		↘	‖

2.b. A l'aide de GeoGebra, il est aisé d'obtenir la représentation graphique de la fonction V sur l'intervalle sur [0 ; 1,5].

Sous GeoGebra, on tape l'instruction : 

Représentation graphique de la fonction V sur [0 ; 1,5]



2.b. D'après le tableau de variation de la fonction V et comme on peut le conjecturer sur la courbe représentative de la fonction, le volume sera maximal pour <u>x = 0,5 m</u>, soit 50 cm et sa valeur maximale sera de 2 m^3 : $\underline{V_{max} = 2\ m^3}$.

Remarque

Dans la question 2.a., il était possible de développer tout d'abord l'expression $x(3 - 2x)^2$, puis de dériver le polynôme ainsi obtenu pour obtenir V'(x). L'opération de dérivation est aisée mais le résultat est un trinôme du second degré dont il faut déterminer les racines pour étudier le signe. Dans la méthode utilisée, l'expression obtenue pour V'(x) est une expression déjà factorisée, ce qui évite la recherche de racines par la méthode laborieuse du discriminant. Encore faut-il connaître son cours et se souvenir des deux résultats fondamentaux :

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

et

$$[u(x)^2]' = 2u(x)u'(x)$$