

Activité autour du poulailler

Soit f la fonction polynomiale de degré 2 définie par $f(x) = -2x^2 + 40x + 42$.

1. Calculons $f(x)$ pour $x = 0$ à 21.

$$f(0) = -2(0)^2 + 40(0) + 42 = 42$$

$$f(1) = -2(1)^2 + 40(1) + 42 = -2 + 40 + 42 = 80$$

$$f(2) = -2(2)^2 + 40(2) + 42 = -8 + 80 + 42 = 122 - 8 = 114$$

$$f(3) = -2(3)^2 + 40(3) + 42 = -18 + 120 + 42 = 162 - 18 = 144$$

$$f(4) = -2(4)^2 + 40(4) + 42 = -32 + 160 + 42 = 202 - 32 = 170$$

$$f(5) = -2(5)^2 + 40(5) + 42 = -50 + 200 + 42 = 242 - 50 = 192$$

$$f(6) = -2(6)^2 + 40(6) + 42 = -72 + 240 + 42 = 282 - 72 = 210$$

$$f(7) = -2(7)^2 + 40(7) + 42 = -98 + 280 + 42 = 322 - 98 = 224$$

$$f(8) = -2(8)^2 + 40(8) + 42 = -128 + 320 + 42 = 362 - 128 = 234$$

$$f(9) = -2(9)^2 + 40(9) + 42 = -162 + 360 + 42 = 402 - 162 = 240$$

$$f(10) = -2(10)^2 + 40(10) + 42 = -200 + 400 + 42 = 242$$

$$f(11) = -2(11)^2 + 40(11) + 42 = [-2(11) + 40](11) + 42 = [-22 + 40](11) + 42$$

$$f(11) = (18)(11) + 42 = 198 + 42 = 240$$

$$f(12) = -2(12)^2 + 40(12) + 42 = [-2(12) + 40](12) + 42 = [-24 + 40](12) + 42$$

$$f(12) = (16)(12) + 42 = 192 + 42 = 234$$

$$f(13) = -2(13)^2 + 40(13) + 42 = [-2(13) + 40](13) + 42 = [-26 + 40](13) + 42$$

$$f(13) = (14)(13) + 42 = 182 + 42 = 224$$

$$\text{ou } f(13) = -2(13)^2 + 40(13) + 42 = -2(169) + 520 + 42 = -338 + 562 = 224$$

$$f(14) = -2(14)^2 + 40(14) + 42 = [-2(14) + 40](14) + 42 = [-28 + 40](14) + 42$$

$$f(14) = (12)(14) + 42 = 168 + 42 = 210$$

$$f(15) = -2(15)^2 + 40(15) + 42 = [-2(15) + 40](15) + 42 = [-30 + 40](15) + 42$$

$$f(15) = (10)(15) + 42 = 150 + 42 = 192$$

$$f(16) = -2(16)^2 + 40(16) + 42 = [-2(16) + 40](16) + 42 = [-32 + 40](16) + 42$$

$$f(16) = (8)(16) + 42 = 128 + 42 = 170$$

$$f(17) = -2(17)^2 + 40(17) + 42 = [-2(17) + 40](17) + 42 = [-34 + 40](17) + 42$$

$$f(17) = (6)(17) + 42 = 102 + 42 = 144$$

$$f(18) = -2(18)^2 + 40(18) + 42 = [-2(18) + 40](18) + 42 = [-36 + 40](18) + 42$$

$$f(18) = (4)(18) + 42 = 72 + 42 = 114$$

$$f(19) = -2(19)^2 + 40(19) + 42 = [-2(19) + 40](19) + 42 = [-38 + 40](19) + 42$$

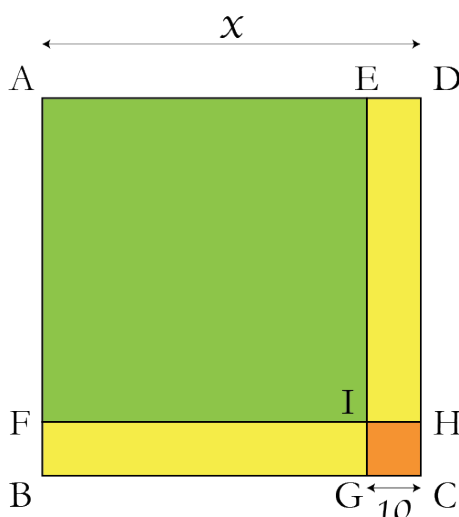
$$f(19) = (2)(19) + 42 = 38 + 42 = 80$$

$$f(20) = -2(20)^2 + 40(20) + 42 = -800 + 800 + 42 = 42$$

$$f(21) = -2(21)^2 + 40(21) + 42 = -2(441) + 840 + 42 = -882 + 882 = 0$$

Il est important de s'entraîner à effectuer mentalement les calculs ci-dessus afin de gagner en dextérité, mais il est aussi fondamental de savoir modéliser la fonction f à l'aide de la calculatrice afin de pouvoir obtenir rapidement un tableau de valeurs et une représentation graphique de la fonction.

2. On considère la figure ci-dessous.



Calculons l'aire du carré ABCD à l'aide des aires des carrés AFIE et IGCH, puis des rectangles EIHD et FBGI.

$$\text{On a, d'une part : } A_{ABCD} = x^2$$

$$\text{D'autre part : } A_{ABCD} = A_{AFIE} + 2 \times A_{FBGI} + A_{IGCH}$$

$$A_{ABCD} = (x - 10)^2 + 2(10)(x - 10) + 10^2 = (x - 10)^2 + 20(x - 10) + 100$$

$$A_{ABCD} = (x - 10)^2 + 20x - 200 + 100 = (x - 10)^2 + 20x - 100$$

$$\text{On a donc : } \underline{x^2 = (x - 10)^2 + 20x - 100}$$

3. Démontrons que $x^2 - 20x - 21 = (x - 10)^2 - 121$.

$$\text{D'après la question 2, on a : } x^2 = (x - 10)^2 + 20x - 100.$$

$$\text{Donc : } x^2 - 20x = (x - 10)^2 - 100$$

$$\text{En résultat : } x^2 - 20x - 21 = (x - 10)^2 - 121.$$

Il est possible de démontrer directement l'égalité $x^2 - 20x - 21 = (x - 10)^2 - 121$

On a : $\underbrace{(x - 10)^2}_{\text{identité rem.}} - 121 = x^2 - 2(x)(10) + 10^2 - 121 = x^2 - 20x + 100 - 121$

D'où : $(x - 10)^2 - 121 = x^2 - 20x - 21$

4. Montrons que $f(x) = -2[(x - 10)^2 - 11^2]$.

$$\begin{aligned} -2[(x - 10)^2 - 11^2] &= -2[(x - 10)^2 - 121] = -2[x^2 - 20x - 21] \\ &= -2x^2 + 40x + 42 = f(x) \end{aligned}$$

5. Démontrons que $f(x) \leq 242$ pour tout réel x .

Calculons $f(x) - 242$

$$\begin{aligned} f(x) - 242 &= -2[(x - 10)^2 - 11^2] - 242 = -2[(x - 10)^2 - 121] - 242 \\ &= -2[(x - 10)^2] + 242 - 242 = -2[(x - 10)^2] \leq 0 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - 242 \leq 0$

C'est-à-dire : $f(x) \leq 242$

6. En déduire que la fonction f admet un maximum lorsque $x = 10$.

Pour toutes les valeurs de x , on a : $f(x) \leq 242$ avec $f(10) = 242$.

Donc : 242 est la valeur maximale que peut prendre la fonction f . On dit que la fonction f admet un maximum lorsque $x = 10$ et que ce maximum est 242.

7. Démontrons que $f(x) = -2(x + 1)(x - 21)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= -2 \left[\underbrace{(x - 10)^2 - 11^2}_{a^2 - b^2} \right] = -2[(x - 10 - 11)(x - 10 + 11)] \\ &= -2[(x - 21)](x + 1) = -2(x + 1)(x - 21) \end{aligned}$$

On rappelle que : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

8. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -2(x + 1)(x - 21) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } x - 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 21 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions -1 et 21, mais comme x appartient à l'intervalle $[0 ; 21]$, seule la solution 21 est admissible.