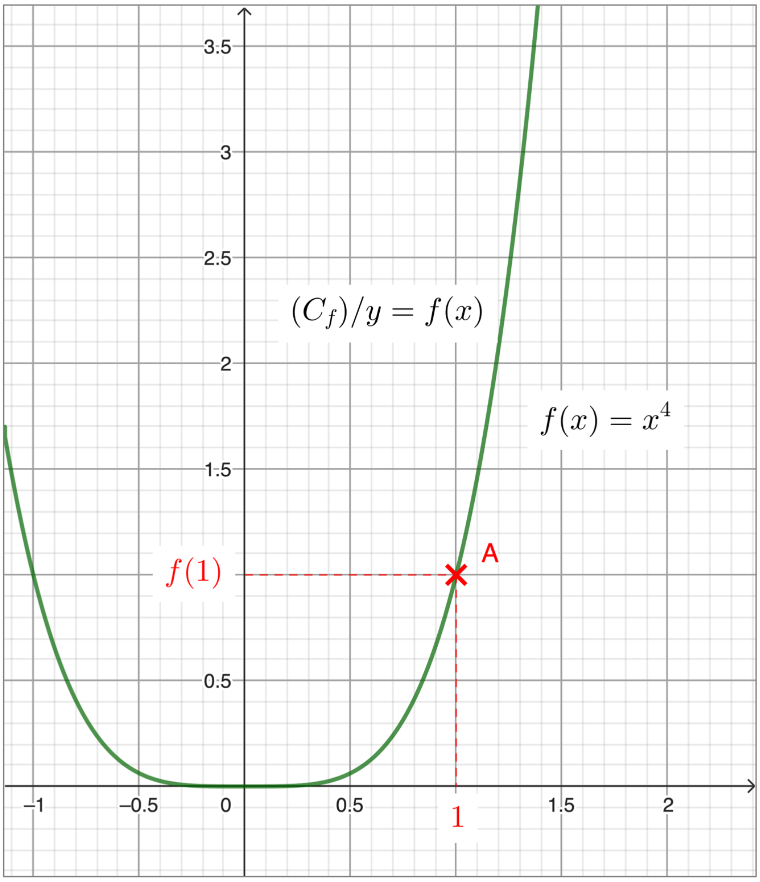
correction de l'exercice 5

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = x^4$.

1. Tracé de la courbe représentative de la fonction f et construction du point A d'abscisse 1.



2. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre 1 et 1 + h, h ≠ 0.

   On a : $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ avec :

   $f(1) = (1)^4 = 1.$

   $f(1+h) = (1+h)^4 = 1^4 + 4(1)^3h + 6(1)^2h^2 + 4(1)h^3 + h^4$

   D'où : $f(1+h) = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4$.

   Donc :

   $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1+4h+6h^2+4h^3+h^4-(1)}{h} = \frac{4h+6h^2+4h^3+h^4}{h} = 4 + 6h + 4h^2 + h^3.$

3. Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 1 + h tend vers 4 quand h tend vers 0.

   On écrit : $\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0}(4 + 6h + 4h^2 + h^3) = 4.$

4. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre a et a + h, h ≠ 0 et a réel.

   On a : $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec :

$f(a) = a^4$.

$f(a+h) = (a+h)^4 = a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4$.

Donc :

$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^4+4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4-(a^4)}{h} = \frac{4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4}{h}$.

D'où : $\tau(h) = 4a^3 + 6a^2h + 4ah^2 + h^3$.

5. Le taux de variation de la fonction f entre a et a + h tend vers $4a^3$ quand h tend vers 0.

   On écrit : $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0}(4a^3 + 6a^2h + 4ah^2 + h^3) = 4a^3$.

6. On a : $f'(a) = 4a^3$.