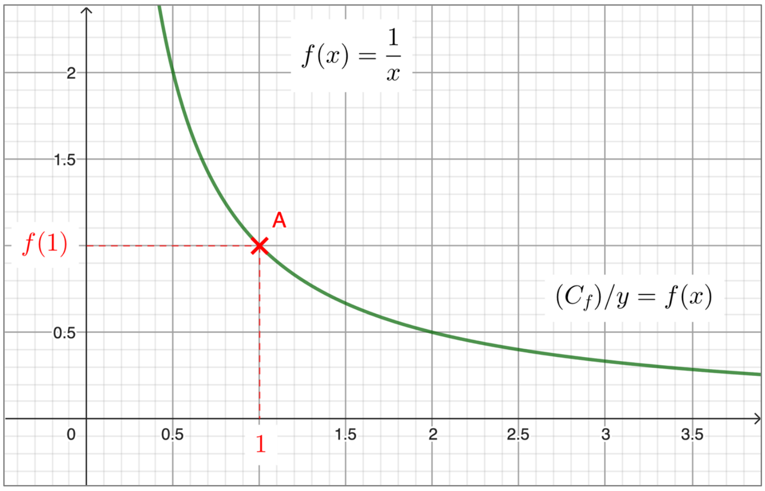
Correction de l'exercice 6

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Tracé de l'hyperbole représentative de la fonction f.



2. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre 1 et 1 + h, h ≠ 0.

   On a : $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ avec :

   $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

   $f(1+h) = \frac{1}{1+h}$

   D'où : $f(1+h) - f(1) = \frac{1}{1+h} - 1 = \frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h} = \frac{1-(1+h)}{1+h} = \frac{1-1-h}{1+h} = \frac{-h}{1+h}$

   Donc : $\tau(h) = \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{1+h}$

3. Le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction f entre 1 et 1 + h tend vers -1 quand h tend vers 0.

   On écrit : $\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{1+h}\right) = -1.$

4. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre a et a + h, h ≠ 0.

   On a : $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

   $f(a) = \frac{1}{a}$

   $f(a+h) = \frac{1}{a+h}$

   D'où : $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{a-a-h}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$

   Donc : $\tau(h) = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$

5. Le taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et a + h tend vers $-\frac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

   On écrit : $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$

6. On note $f'(a)$ la valeur vers laquelle tend le taux de variation de la fonction f entre a et a + h lorsque h tend vers 0.

   On a donc ici : $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

   Ce nombre est la pente de la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse a.

7. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   La pente est égale à : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

8. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

   La pente est égale à : $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$