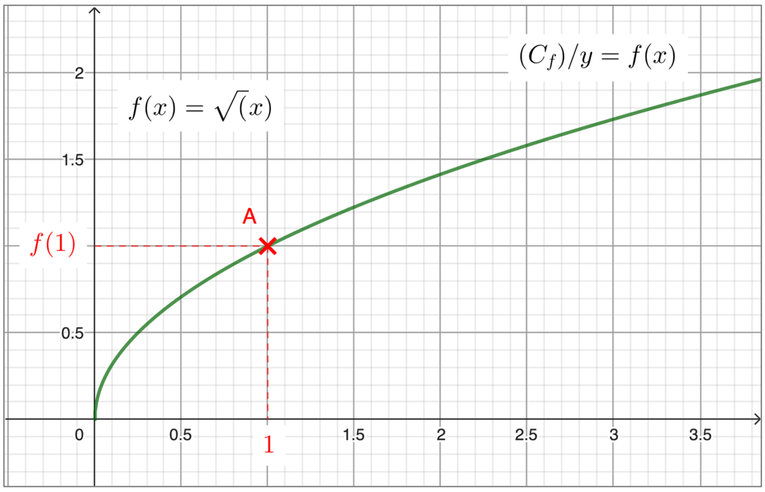
Correction de l'exercice 7

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Tracé de la courbe représentative de la fonction f.



2. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre 1 et 1 + h, h ≠ 0.

On a : $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ avec :

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f(1+h) = \sqrt{1+h}$

D'où : $f(1+h) - f(1) = \sqrt{1+h} - 1 = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{(\sqrt{1+h})^2-1^2}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1+h-1}{\sqrt{1+h}+1}$

Ainsi : $f(1+h) - f(1) = \frac{h}{\sqrt{1+h}+1}$

Donc : $\tau(h) = \frac{\frac{h}{\sqrt{1+h}+1}}{h} = \frac{h}{\sqrt{1+h}+1} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$

3. Le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction f entre 1 et 1 + h tend vers $\frac{1}{2}$ quand h tend vers 0.

On écrit : $\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}\right) = \frac{1}{2}$

4. Déterminons le taux de variation de la fonction f entre a et a + h, h ≠ 0.

On a : $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$f(a) = \sqrt{a}$

$f(a+h) = \sqrt{a+h}$

D'où : $f(a+h) - f(a) = \sqrt{a+h} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{a+h})^2-\sqrt{a}^2}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

Ainsi : $f(a+h) - f(a) = \frac{a+h-a}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{h}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

Donc : $\tau(h) = \frac{\frac{h}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}}{h} = \frac{h}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

5. Le taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et a + h tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ lorsque h tend vers 0.

   On écrit : $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

6. On note $f'(a)$ la valeur vers laquelle tend le taux de variation de la fonction f entre a et a + h lorsque h tend vers 0.

   On a donc ici : $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

   Ce nombre est la pente de la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse a.

7. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 4.

   La pente est égale à : $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

8. Déterminons la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   La pente est égale à : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.