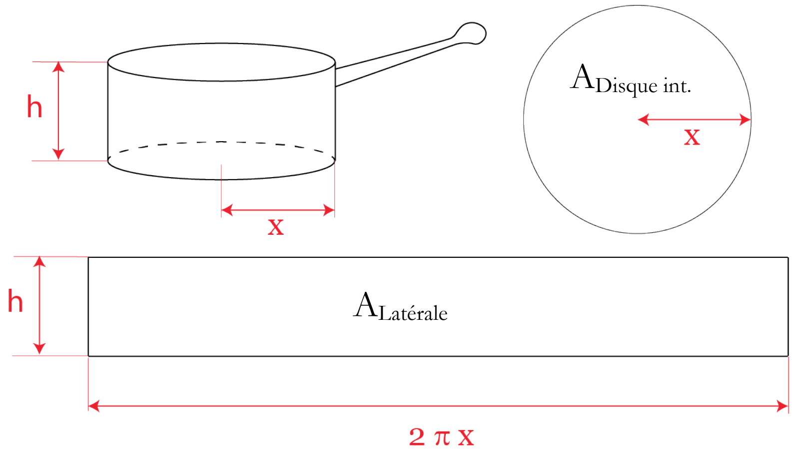
Problème de casserole résolu

Une entreprise fabrique des casseroles de contenance 5 L en utilisant le moins de métal possible. La variable x désigne le rayon intérieur du disque intérieur et h la hauteur de la casserole en centimètres, comme ci-dessous :



a) Exprimons h en fonction de x

D'après l'énoncé, le volume V de la casserole est de 5 L, soit 5 000 cm³.

Or, $V = (\pi \times x^2) \times h$ (produit de l'aire de la base du cylindre par la hauteur du cylindre).

Donc : $\pi \times x^2 \times h = 5\,000$.

En résultat : $h = \dfrac{5\,000}{\pi x^2}$

b) D'après l'énoncé : $S(x) = A_{\text{Latérale}} + A_{\text{Disque int.}}$.

D'où, d'après les figures : $S(x) = (2\pi x) \times h + \pi \times x^2$.

En résultat : $S(x) = 2\pi x\left(\dfrac{5\,000}{\pi x^2}\right) + \pi x^2 = \dfrac{10\,000}{x} + \pi x^2 = \pi x^2 + \dfrac{10\,000}{x}$

c) Étudions les variations de la fonction S sur $]0 ; +\infty[$.

$$S : x \mapsto \pi x^2 + \frac{10\,000}{x}$$

<u>Déterminons S'(x)</u>

On a : $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{10\,000}{x}$

Donc : $S'(x) = 2\pi x + 10\,000\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2\pi x^3 - 10\,000}{x^2\ (>0)} = \dfrac{2}{x^2}(\pi x^3 - 5\,000)$.

Le signe de S'(x) dépend seulement du signe de l'expression $(\pi x^3 - 5\,000)$ car $\dfrac{2}{x^2} > 0$.

La fonction qui à x associe x^3 est une fonction croissante sur]0 ; +∞ [.

Donc la fonction qui à x associe $\pi x^3 - 5\ 000$ est aussi croissante sur]0 ; +∞ [.

x	0	+∞
$\pi x^3 - 5\ 000$	- 5 000 $\nearrow$	

Déterminons si l'on peut trouver une valeur du nombre x pour laquelle on peut annuler l'expression $\pi x^3 - 5\ 000$.

$$\pi x^3 - 5\ 000 = 0 \iff \pi x^3 = 5\ 000 \iff x^3 = \frac{5\ 000}{\pi} \iff x^3 = \frac{5 \times 10^3}{\pi} \iff$$

$$x = 10 \times \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \approx 11{,}675$$

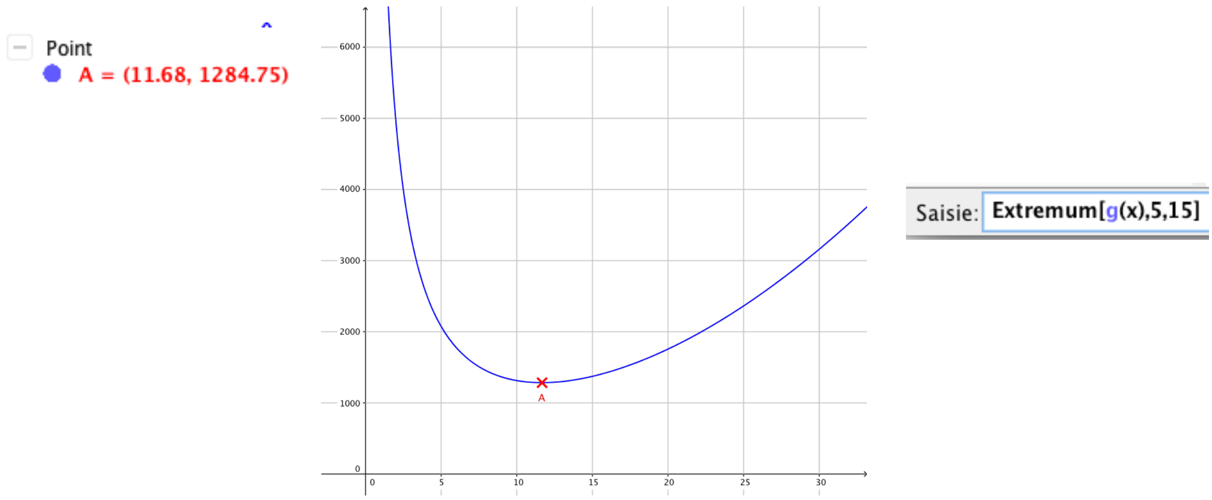
Tableau de signe de S'(x)

x	0		$10 \times \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$		+∞
$\pi x^3 - 5\ 000$	- 5 000	- $\nearrow$	0	$\nearrow$ +	
S'(x)		-	0	+	

Tableau de variation de S sur]0 ; +∞ [.

x	0		$10 \times \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$		+∞
S'(x)	‖	-	0	+	
S(x)	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Représentation graphique de la fonction S



D'après GeoGebra, la valeur minimale de S(x), laquelle est l'abscisse du point A obtenu en affichant l'extremum de la fonction S à l'aide de l'instruction "Extremum" entre 5 et 15, est : 1 284,75 cm^3, valeur obtenue pour x = $10 \times \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$, soit environ 11,68 cm (ou 11 cm et 7 mm en arrondissant au mm près).

Remarque

La difficulté du problème posé réside dans la justification de chacune des affirmations proposées. A cet effet, l'étude des variations de la fonction qui à x associe $\pi x^3 - 5\,000$ ne peut être éludée. Il est par ailleurs indispensable, lors de l'étude d'une fonction, de visualiser sa représentation graphique à l'aide de GeoGebra afin de vérifier les résultats obtenus...