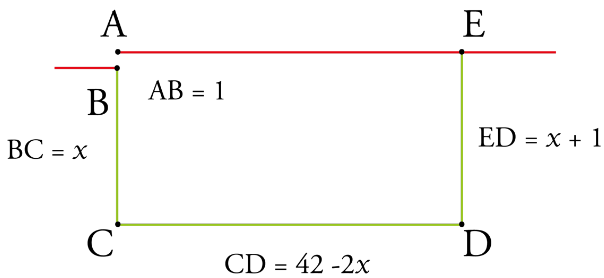
Problème ouvert

Un fermier dispose de 43 mètres de grillage. Il veut clore un poulailler de manière à ce qu'il forme un rectangle avec le mur [AE) et que la surface au sol soit la plus grande possible.
On donne par ailleurs $AB = 1$ *et* $BC = x$.

Exprimer l'aire du poulailler $A(x)$ *en fonction de la variable* x.

<u>Trace de la résolution proposée en classe</u>

Pour résoudre le problème ci-dessus, nous avons tout d'abord complété d'une manière exhaustive la figure.
ACDE étant un rectangle, on a : $ED = AC = AB + BC = 1 + x$.
Comme la longueur du grillage est de 43 mètres, on a : $BC + CD + DE = 43$, d'où :
$x + CD + x + 1 = 43$, donc : $CD = 42 - 2x$.



Par ailleurs, BC et CD étant des longueurs, on a d'une part : $\text{BC} \geq 0$, c.-à-d. $x \geq 0$.
D'autre part : $\text{CD} \geq 0$, c.-à-d. $42 - 2\text{x} \geq 0$, d'où : $x \leq 21$.

Autrement dit : l'aire $A(x)$ du rectangle est donnée par :

$$A(x) = CD \times DE = (x+1)(42-2x) \text{ avec } x \in [0; 21]$$

En développant $A(x)$, on obtient :
$A(x) = (x+1)(42-2x) = 42x - 2x^2 + 42 - 2x = -2x^2 + 40x + 42$.

Autrement dit, l'aire du poulailler est donnée par la fonction $A : x \longmapsto -2x^2 + 40x + 42$, laquelle est une fonction polynomiale de degré 2.
La fonction A est définie par $A(x) = -2x^2 + 40x + 42$.

L'étude d'une fonction telle que la fonction A ou autre fonction s'articulera généralement de la manière suivante :

<u>Étape 1</u>
Déterminons $A'(x)$

On a : $A'(x) = -2(2x) + 40 = -4x + 40$

Étape 2

Étudions le signe de $A'(x)$

La fonction A' définie par $A'(x) = -4x + 40$ est une fonction affine décroissante car son coefficient est négatif (-4). Elle s'annule lorsque $x = 10$.

Tableau de signe de $A'(x)$

x	0		10		21
-4x + 40		+	0	-	

Étape 3

Étudions les variations de la fonction A sur l'intervalle $[0; 21]$.

Tableau de variation de A sur $[0; 21]$.

x	0		10		21
Signe de A'(x)		+	0	-	
A(x)		↗	A(10)	↘	

On remarque que l'aire augmente quand la variable x augmente de 0 à 10, puis on observe qu'elle diminue quand la variable x augmente de 10 à 21. L'aire est maximale lorsque $x = 10$.

Elle est égale à : $A(10) = -2(10)^2 + 40(10) + 42 = 242$.

Remarque

Le problème proposé visait à fournir une application simple d'un outil nouveau dans un contexte éventuellement déjà rencontré en classe de seconde.

La dérivation offre un moyen rapide et puissant de déterminer les variations d'une fonction, c'est-à-dire de savoir si une fonction est croissante ou décroissante et sur quel intervalle(s) elle l'est. Il nous faudra une pratique importante de cet outil avant d'en maîtriser toutes les facettes.