Application de l'exponentielle

exercice 1

Datation au Carbone 14

CALCULATRICE Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tout au long de sa vie, l'organisme d'un être vivant (plante ou animal) échange du carbone avec son environnement si bien que le carbone qu'il contient aura la même proportion de carbone 14 que dans la biosphère. Lorsque l'organisme meurt, il ne reçoit plus de carbone 14 et celui qu'il contient va se désintégrer peu à peu. On peut ainsi retrouver la date approximative de sa mort.
On admet que la concentration $C(t)$ en atomes de carbone 14 contenue dans un organisme t années après sa mort est égal à :

$$C(t) = 10^{-12}\,\mathrm{e}^{-0{,}00012t}.$$

On mesure sur un échantillon une concentration de carbone 14 égale 10^{-13}.
À l'aide d'une calculatrice, déterminer l'âge de cet échantillon.

exercice 2

Concentration d'un médicament

CALCULATRICE On injecte 8 mg d'un médicament dans le sang d'un patient, à l'instant $t = 0$. On note $Q(t)$ la quantité en mg de médicament présent dans le sang du patient à l'instant t exprimé en heures.
La vitesse d'élimination du médicament étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang, on admet que la fonction Q vérifie la relation :

$$(E) : Q'(t) = -\lambda Q(t)$$

où λ est un réel strictement positif.

1. Montrer que la fonction $Q(t) = 8\mathrm{e}^{-\lambda t}$ vérifie la relation (E) ainsi que la condition initiale $Q(0) = 8$.

2. On constate qu'au bout de 2 heures, la quantité de médicament présent dans le sang a diminué de moitié.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de λ à 10^{-2} près.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction Q et déterminer sa limite quand t tend vers $+\infty$.

4. On considère que le médicament est éliminé quand sa quantité dans le sang est inférieure à 0,01 mg.
À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures ce médicament est éliminé.

exercice 3

Modèle logistique de Verhulst

Pour des populations vivant dans un milieu clos (par exemple des bactéries dans une culture), la croissance de la population en fonction du temps est, dans un premier temps, exponentielle puis ralentit fortement (à cause de la surpopulation) pour devenir quasiment stable. Le modèle mathématique qui décrit l'évolution de population s'appelle **modèle logistique de Verhulst**.

On considère une culture bactérienne dans laquelle le nombre de bactéries (en millions) se modélise par la fonction f définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$f(t) = \frac{150}{1+90\mathrm{e}^{-0,6t}}.$$

t désigne le temps en heures.

1. Quel est le nombre de bactéries à l'instant initial $t=0$?

2. CALCULATRICE LOGICIEL Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique.
Quelle conjecture peut-on faire quant à la limite de la fonction f lorsque t temps vers $+\infty$?

3. Démontrer la conjecture précédente.

4. Un logiciel d calcul formel adonné le résultat suivant :

$$f'(t) = \frac{8100\mathrm{e}^{-0,6t}}{\left(1+90\mathrm{e}^{-0,6t}\right)^2}.$$

Déduire de ce résultat les variations de la fonction f pour $t \geqslant 0$ et dresser son tableau de variation.

exercice 4

Charge limite d'un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 0,5\ \mu\mathrm{F}$ est monté dans un circuit électrique en série avec une résistance de valeur $R = 4\ \Omega$. Un générateur fournit au circuit une tension E (en V) en fonction du temps t (en s).
À l'instant t, la charge du condensateur est modélisée par la fonction C définie par $C(t) = 50C\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction C et dresser son tableau de variation.

2. Construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 1 seconde et 1 cm pour 5 μF.

3. Quelle est la charge limite du condensateur ?