Propriétés fondamentales de l'exponentielle

Les propriétés mentionnés ci-après sont à connaître impérativement :

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ pour tout x.

De plus : $e^x \geq 1$ pour tout $x \geq 0$.

$e^x \times e^y = e^{(x+y)}$ pour tous réels x et y

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$\left(e^x\right)^m = e^{mx}$, m étant un entier relatif

On a : $e^1 = e$ avec $e \approx 2{,}718$ et $e^0 = 1$

22 Simplifier les expressions suivantes :

$A = (1 + e^x) \times (1 - e^{-x})$ $\qquad$ $B = 5e^{1+x} \times e^{-x}$

$C = \dfrac{1 - e^{2x}}{e^x}$ $\qquad$ $D = \dfrac{x + e^x}{e^{-x}}$

23 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1 - e^{2x}}{e^x}$.

1. Montrer que $f(-1) = -f(1)$.

2. L'égalité $f(-x) = -f(x)$ est-elle vraie pour tout réel x ?

24 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

1. Comparer $g(1)$ et $g(-1)$.

2. Démontrer que $g(-x) = g(x)$ pour tout réel x.

25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{0{,}5e^x - 2}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) = 0{,}5 - \frac{2{,}5}{e^x + 1} = \frac{2{,}5e^x}{e^x + 1} - 2$$

2. En déduire que pour tout réel x, $-2 < f(x) < 0{,}5$.

3. Démontrer que pour tout réel x :

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = -\frac{3}{4}$$