

Problème 4

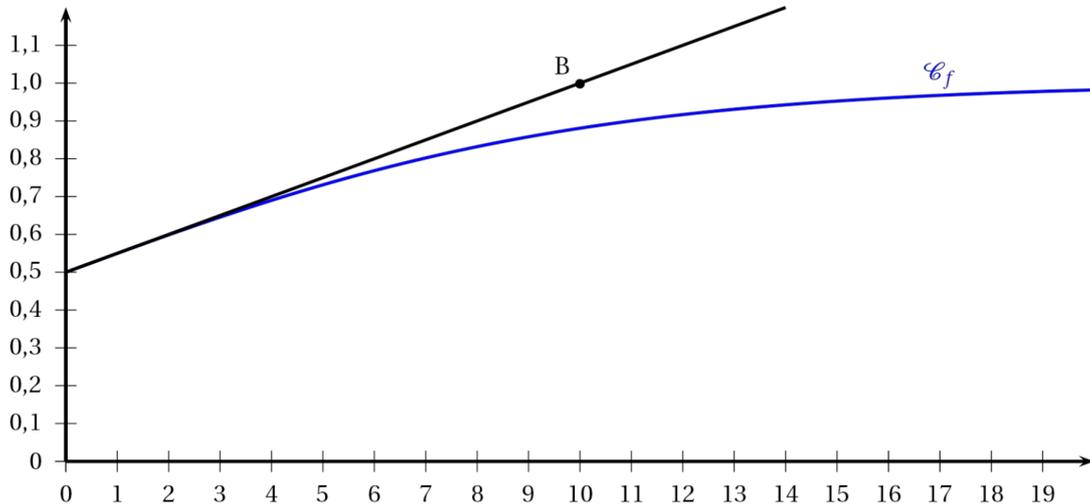
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}.$$

La courbe \mathcal{C}_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe \mathcal{C}_f passe par le point $A(0; 0,5)$. La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A passe par le point $B(10; 1)$.



1. Justifier que $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b .

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2.
 - a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0; +\infty[$.
 - b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
 - c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.