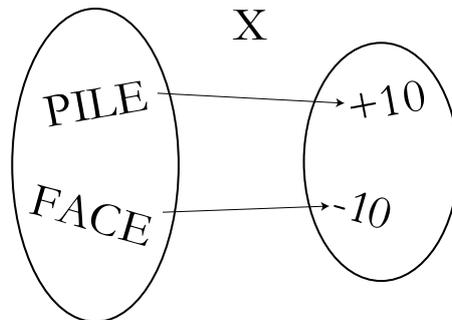


# ESPÉRANCE

## exemple 1

Pour bien comprendre le concept d'espérance, imaginons une pièce parfaitement équilibrée. Lorsque l'on tire PILE, on gagne 10 €. Dans le cas contraire on perd 10 €. Nous avons défini là une variable aléatoire discrète, appelée généralement "gain" et notée ici simplement X, laquelle peut prendre les deux valeurs -10 et +10.



La loi de probabilité de cette variable aléatoire X est triviale.

$x_i$	-10	+10
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

Comment estimer ce que l'on gagnerait si on lançait la pièce 1 000 fois ?

Si on lance la pièce une seule fois, comme la probabilité de perdre 10 € est de 0,5 et comme celle de gagner 10 € est de 0,5, on peut espérer un gain moyen par lancer de :

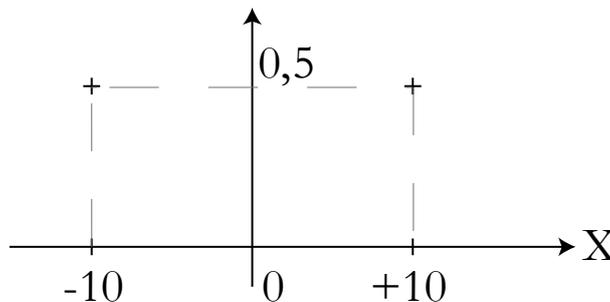
$$0,5 \times (-10) + 0,5 \times (10) = -5 + 5 = 0.$$

Cette valeur 0 n'est autre que celle de l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire discrète X.

$$E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 \text{ par définition}$$

Autrement dit, si on lance 1 000 fois la pièce, on peut espérer gagner au total 1 000 × 0 = 0 !

La loi de probabilité de la VAD X est uniforme et sa représentation graphique est la suivante :



X étant une variable aléatoire discrète, on peut représenter directement la probabilité que X prenne la valeur  $x_i$  sur l'axe vertical en fonction de  $x_i$ .

## exemple 2

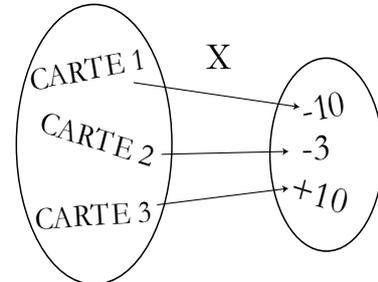
Imaginons qu'on nous présente 3 cartes indiscernables, comportant les mentions -10, -3 et +10.

Si je tire la carte comportant -10, alors je perds 10 €.

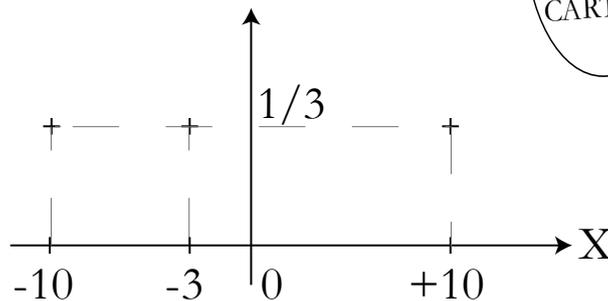
Si je tire la carte comportant -3, alors je perds 3 €. Sinon, je gagne 10 €.

La loi de probabilité de X est la suivante :

$x_i$	-10	-3	+10
$P(X = x_i)$	1/3	1/3	1/3



Une représentation graphique possible de la loi serait :



Cette loi est uniforme !

Pour calculer l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire discrète X, on calcule :

$$E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + P(X = x_3) \times x_3$$

D'où :

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-10) + \frac{1}{3} \times (-3) + \frac{1}{3} \times (10) = \frac{1}{3} \times (-10 - 3 + 10) = \frac{1}{3} \times (-10 - 3 + 10) = -1 .$$

Si on jouait à tirer 1 000 cartes, nous perdriions probablement une somme voisine de  $1\,000 \times (-1)$ , soit une perte de 1000 €.

Comment s'est calculée l'espérance ?

En calculant la somme discrète des  $x_i \times P(X=x_i)$  pour  $x_i = -10, -4$  et  $+10$  (i allant de 1 à 3).

## conclusion

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i$$