Cours autour des probabilités conditionnelles

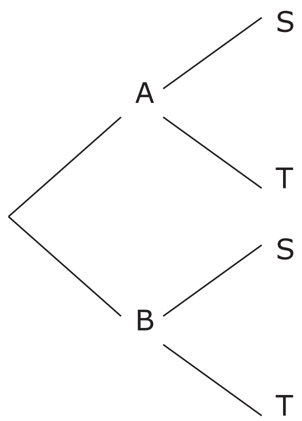
1. Définition

Soient A et B deux évènements avec P(A) ≠ 0. La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

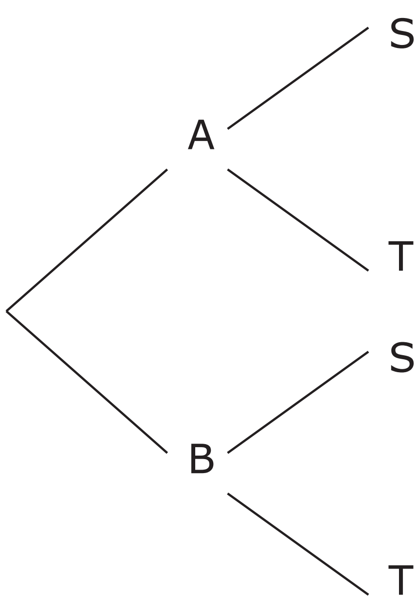
2. Le vocabulaire de base

Indiquer par une flèche sur l'arbre ci-contre une branche, un nœud, un chemin et une feuille.



3. Identification de probabilités sur un arbre

On considère l'arbre de probabilité ci-dessous. Indiquer sur chaque branche de l'arbre la probabilité correspondante avec la notation qui convient.

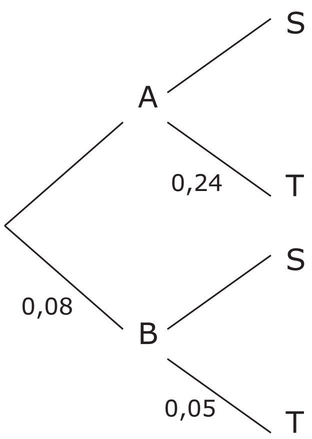


4. Propriétés des arbres

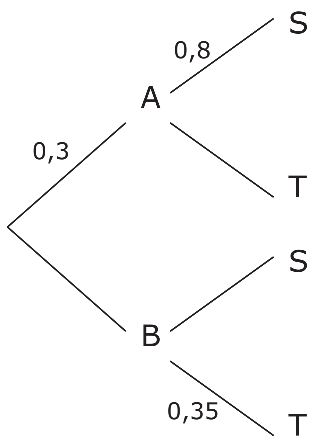
4.1. Propriété 1

La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Arbre 1



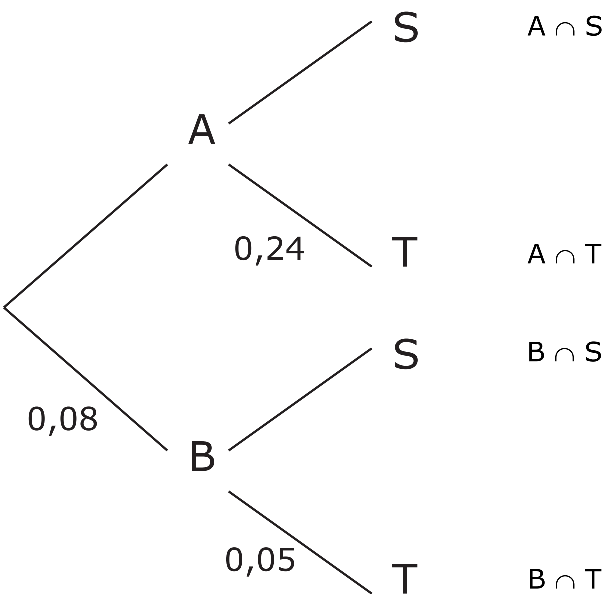
Arbre 2



Déterminer P(A), P(B), $P_A(S)$, $P_A(T)$, $P_B(S)$ et $P_B(T)$ pour l'arbre 1 et l'arbre 2.

4.2. Propriété 2

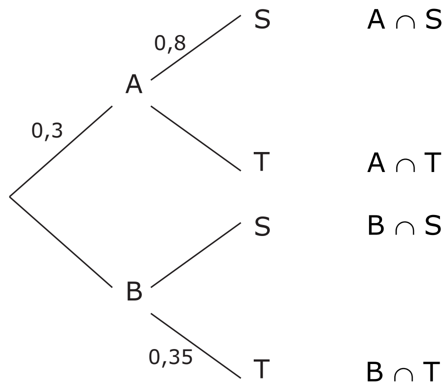
La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui aboutit à cette feuille.



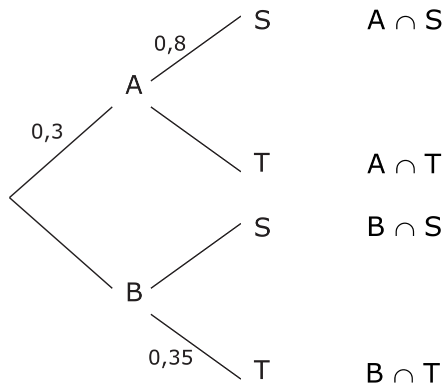
Déterminer $P(A \cap S)$, $P(A \cap T)$, $P(B \cap S)$ et $P(B \cap T)$.

4.3. Propriété 3 [formule des probabilités totales]

La probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles est égale à la somme des probabilités de chacune de ces feuilles.



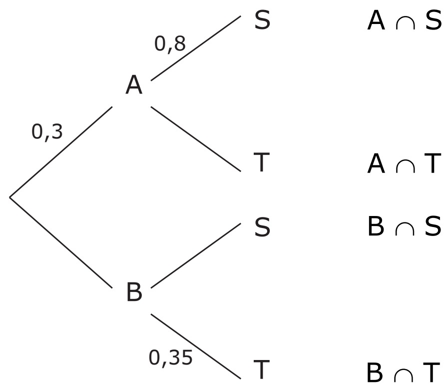
Déterminer P(S).



Déterminer P(T).

5. Théorème de BAYES

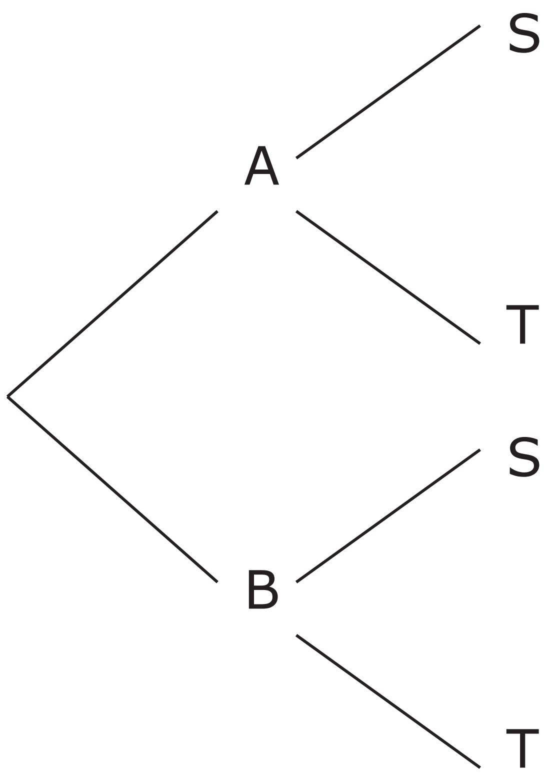
On considère l'arbre de probabilité ci-dessous :



Déterminer $P_S(A)$ et $P_S(B)$.

Un peu de théorie…

On considère l'arbre ci-dessous :



1) $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S)$

2) <u>**Formule des probabilités totales**</u>

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S)$$

3) <u>**Théorème de BAYES**</u>

$$P_S(A) = \frac{P_A(S) \times P(A)}{P(S)}$$