

Corrigé de l'évaluation sur les suites numériques...

Le cours

1. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

La définition explicite d'une telle suite est : $u_n = q^n \times u_0$

2. On a : $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$\text{Donc : } 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + \dots + 0,5^{10} = \frac{1 - 0,5^{10+1}}{1 - 0,5} = \frac{1 - 0,5^{11}}{0,5} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right] \times 2$$

$$\text{D'où : } 1 + 0,5 + 0,5^2 + \dots + 0,5^{10} = \left[1 - \frac{1}{2^{11}}\right] \times 2 = \left[\frac{2^{11}}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}}\right] \times 2 = \left[\frac{2048}{2048} - \frac{1}{2048}\right] \times 2 = \left[\frac{2047}{2048}\right] \times 2$$

$$\text{En résultat : } 1 + 0,5 + 0,5^2 + \dots + 0,5^{10} = \frac{2047}{1024}$$

Exercice 1

Soit u la suite définie pour tout entier naturel par : $u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{u_n}$ et $u_0 = 4$.

Déterminons les cinq premiers termes de la suite.

$$u_0 = 4 \qquad u_1 = \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad u_2 = \frac{2+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{2+\frac{3}{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

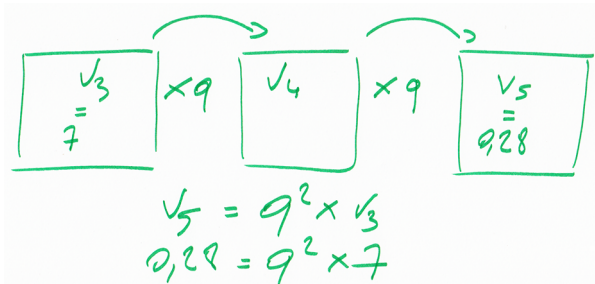
$$u_3 = \frac{2+\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{2+\frac{7}{3}}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{13}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{13}{7} \qquad u_4 = \frac{2+\frac{13}{7}}{\frac{13}{7}} = \frac{\frac{2+\frac{13}{7}}{7}}{\frac{13}{7}} = \frac{27}{7} \times \frac{7}{13} = \frac{27}{13}$$

Exercice 2

Soit v une suite géométrique telle que $v_3 = 7$ et $v_5 = 0,28$.

Déterminons la raison q de la suite v et son premier terme v_0 .

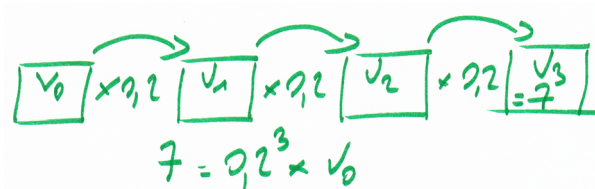
Schéma de la situation



D'après le schéma, on a : $7q^2 = 0,28$, donc : $q^2 = \frac{0,28}{7} = \frac{28}{700} = \frac{28}{100} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{100}$.

D'où : $q = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$ ou $q = -0,2$

Déterminons v_0 pour $q = 0,2$.



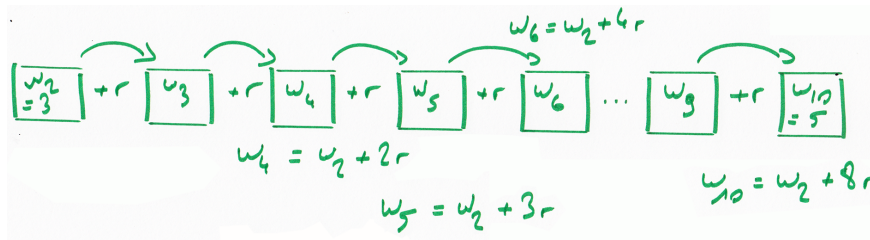
On a : $7 = 0,2^3 \times v_0$, donc : $v_0 = \frac{7}{0,2^3} = \frac{7}{\left(\frac{2}{10}\right)^3} = \frac{7}{\left(\frac{2^3}{10^3}\right)} = 7 \times \frac{1000}{8} = 7 \times 125 = 875$

Pour $q = -0,2$, nous aurions $v_0 = -875$.

Exercice 3

Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_2 = 3$ et $w_{10} = 5$.

Déterminons w_{15} .



D'après le schéma, on a : $w_{10} = w_2 + 8r$, donc : $5 = 3 + 8r$, d'où : $2 = 8r$.

En résultat : $r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

On a : $w_{15} = w_0 + 15r$ (formule explicite)

De plus : $w_{10} = w_0 + 10r$

Donc : $w_{15} - w_{10} = 5r$. Ainsi : $w_{15} = w_{10} + 5r = 5 + 5\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{4} + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$

Exercice 4

On note $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

1. On a : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On a : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

Donc : $2S = n(n+1)$. En résultat : $S = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Calculons $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$. On a : $S = \frac{99(99+1)}{2} = \frac{99(100)}{2} = \frac{9900}{2} = \underline{4950}$

4. Soit U la suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ telle que $U_0 = 5$. Calculons $U_0 + U_1 + \dots + U_{100}$.

On a : $U_0 + U_1 + \dots + U_{100} = 101 \times \frac{(U_0 + U_{100})}{2}$ avec $U_{100} = U_0 + 100 \times r = 5 + 100\left(\frac{1}{4}\right) = 5 + 25 = \underline{30}$

Donc : $U_0 + U_1 + \dots + U_{100} = 101 \times \frac{(5+30)}{2} = 101 \times \left(\frac{35}{2}\right) = \frac{3535}{2}$

Exercice 5

On considère la suite (V_n) définie pour $n \geq 0$ par $V_n = \frac{-n+6}{5}$.

Déterminons la nature de la suite, ainsi que ses caractéristiques.

Déterminons V_{n+1}

$$\text{On a : } V_{n+1} = \frac{-(n+1)+6}{5} = \frac{-n-1+6}{5} = \frac{-n+6-1}{5} = \frac{-n+6}{5} - \frac{1}{5} = V_n - \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc : } V_{n+1} = V_n - \frac{1}{5} \text{ avec } V_0 = \frac{-0+6}{5} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \underline{1,2}$$

En conclusion, la suite V est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = 1,2$.

Problème

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $u_0 + u_1 + u_2 = 70$ et $u_0 \times u_1 \times u_2 = 1\,000$.

Traduisons l'énoncé par un schéma

$$\begin{aligned} & \boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \\ & u_1 = q u_0 \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_0 \\ & u_0 + u_1 + u_2 = u_0 + q u_0 + q^2 u_0 \\ & \quad = u_0 + q u_0 + q^2 u_0 \\ & \quad = (1 + q + q^2) u_0 \\ & u_0 u_1 u_2 = u_0 (q u_0) (q^2 u_0) \\ & \quad = u_0^3 q^3 \end{aligned}$$

1. D'après l'énoncé : $u_0 + u_1 + u_2 = 70$ et $u_0 \times u_1 \times u_2 = 1\,000$.

Or, d'après le schéma : $u_0 + u_1 + u_2 = (1 + q + q^2) u_0$ et $u_0 u_1 u_2 = q^3 u_0^3$

Il en résulte le système de deux équations à deux inconnues :
$$\begin{cases} (1 + q + q^2) u_0 = 70 & (L1) \\ q^3 u_0^3 = 1000 & (L2) \end{cases}$$

2. D'après (L2), on a : $q u_0 = 10$, d'où : $u_0 = \frac{10}{q}$

En substituant $\frac{10}{q}$ à u_0 dans (L1), on obtient : $(1 + q + q^2) \frac{10}{q} = 70$, d'où : $10(1 + q + q^2) = 70q$

Ainsi : $10 + 10q + 10q^2 = 70q$, d'où : $1 + q + q^2 = 7q$.

En résultat, q est solution de l'équation $q^2 - 6q + 1 = 0$.

3. Résolvons l'équation $q^2 - 6q + 1 = 0$ et déterminons les valeurs possibles de q .

Déterminons le discriminant du trinôme $q^2 - 6q + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(1) = 36 - 4 = 32 = 16 \times 2 > 0$$

Le trinôme admet deux racines distinctes q_1 et q_2 .

$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$q_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{16 \times 2}}{2(1)}$$

$$q_1 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{q_1 = 3 - 2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \underline{q_2 = 3 + 2\sqrt{2}}$$