BILAN - suites numériques

Cours

1. Une suite numérique est une fonction qui associe à tout entier naturel un nombre réel.
2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ où $q \neq 1$.
4. On a : $u_n = q^{n-m} \times u_m$.

Exercice 1

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^{n+1}}{4^n}$.

1. On a : $u_0 = \frac{3^1}{4^0} = 3,\ u_1 = \frac{3^2}{4^1} = \frac{9}{4}$ et $u_2 = \frac{3^3}{4^2} = \frac{27}{16}$.
2. La suite (u_n) est une suite géométrique car $u_n = \frac{3^{n+1}}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} \times 3 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3 =$

   $q^n \times u_0$ avec $q = \frac{3}{4}$ et $u_0 = 3$.
3. Le schéma de la suite (u_n) a été maintes fois représenté (c.f. cours et exercices).
4. On a : $q = \frac{3}{4}$ et $u_0 = 3$.

Exercice 2

On considère la suite géométrique u de raison $q = \frac{1}{3}$ telle que $u_0 = 243$.

1. On a : $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$
2. On a : $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 243$
3. On a : $u_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 243 = 9$ et $u_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 9 = 1$.
4. On a : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times u_0$
5. On a : $u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = \frac{1-q^6}{1-q} \times u_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \times 243 = \frac{3}{2} \times \frac{728}{729} \times 243$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{728}{3} = \frac{728}{2} = 364$$

ou encore : $u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = \frac{1-q^6}{1-q} \times u_0 = \frac{1-\frac{1}{3^6}}{\frac{2}{3}} \times 243 = \frac{3}{2} \times \frac{3^6-1}{3^6} \times 243$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3^6-1}{3^5} \times 243 = \frac{1}{2} \times \frac{3^6-1}{243} \times 243 = \frac{3^6-1}{2}$$

Exercice 3

On considère la suite géométrique (e_n) de raison q telle que $q = 2$ et $e_0 = \frac{1}{5}$.

1. Définition explicite de la suite (e_n) : $e_n = q^n \times e_0 = \frac{1}{5} \times 2^n$.

2. On a : $e_8 = \frac{1}{5} \times 2^8 \;= \frac{256}{5} = \frac{512}{10} = 51{,}2$.

3. Relation de récurrence qui définit la suite (e_n) : $e_{n+1} = q \times e_n = 2 \times e_n$.

4. On considère une feuille d'épaisseur 0,2 mm. On replie la feuille sur elle-même successivement dix fois. Est-il vrai que l'épaisseur de la feuille repliée dix fois sur elle-même dépasse 20 centimètres ?
   L'épaisseur après 10 pliages sera égale à :
   $e_{10} = \frac{1}{5} \times 2^{10} = \frac{2}{10} \times 2^{10} = \frac{2}{10} \times 1024 = 204{,}8$ mm, c'est-à-dire 20,48 cm > 20 cm.

5. La distance entre Paris et New-York est supposée égale à 6 000 km, c'est-à-dire :
   $$6 \times 10^9 \text{ mm ou } 6 \times 10^8 \text{ cm}$$
   On veut déterminer le nombre de fois qu'il faudrait plier la feuille de 2 mm, c.-à-d. de $\frac{1}{5}$ cm pour obtenir un fil tenu de longueur au moins égale à la distance Paris et New-York.
   On doit donc se poser la question : pour quelle valeur du nombre n a-t-on :
   $\frac{1}{5} \times 2^n = 6 \times 10^8$? C'est-à-dire : $2^n = 30 \times 10^8$ ou encore $2^n = 3 \times 10^9$?

6. On sait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$. Donc : $2^{30} = 1024^3 \approx (10^3)^3 = 10^9$.
   D'où : $2^{32} \approx 4 \times 10^9 > 3 \times 10^9$.
   Il faudra 32 pliages pour atteindre une longueur égale à la distance entre Paris et New-York.
   Évidemment, on pouvait faire le calcul à la calculatrice, mais à quoi bon puisque tout était simple ?