corrigé de l'exemple d'évaluation

Le cours

1. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

   La définition explicite d'une telle suite est : $u_n = q^n \times u_0$

2. On a : $1+q+q^2+q^3+ \quad \cdots \quad +q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

   Donc : $1+0{,}5+0{,}5^2+0{,}5^3+ \quad \cdots \quad +0{,}5^{10} = \dfrac{1-0{,}5^{10+1}}{1-0{,}5} = \dfrac{1-0{,}5^{11}}{0{,}5} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]\times 2$

   D'où : $1+0{,}5+0{,}5^2+ \quad \cdots \quad +0{,}5^{10} = \left[1-\dfrac{1}{2^{11}}\right]\times 2 = \left[\dfrac{2^{11}}{2^{11}}-\dfrac{1}{2^{11}}\right]\times 2 = \left[\dfrac{2048}{2048}-\dfrac{1}{2048}\right]\times 2 = \left[\dfrac{2047}{2048}\right]\times 2$

   En résultat : $1+0{,}5+0{,}5^2+ \quad \cdots \quad +0{,}5^{10} = \dfrac{2047}{1024}$

Exercice 1

Soit u la suite définie pour tout entier naturel par : $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$ et $u_0 = 4$.

Déterminons les cinq premiers termes de la suite.

$u_0 = 4$

$$u_1 = \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{2+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$u_3 = \frac{2+\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{13}{3}\times\frac{3}{7} = \frac{13}{7}$$

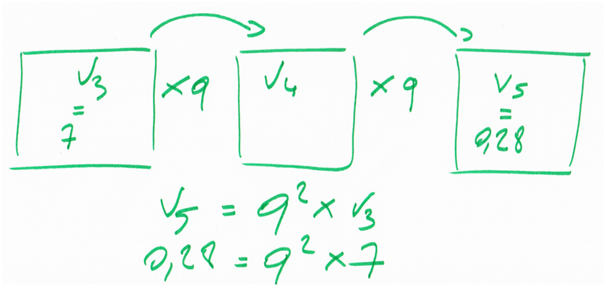
$$u_4 = \frac{2+\frac{13}{7}}{\frac{13}{7}} = \frac{\frac{27}{7}}{\frac{13}{7}} = \frac{27}{7}\times\frac{7}{13} = \frac{27}{13}$$

Exercice 2

Soit v une suite géométrique telle que $v_3 = 7$ et $v_5 = 0{,}28$.

Déterminons la raison q de la suite v et son premier terme v_0.

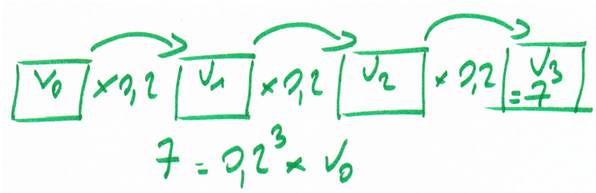
Schéma de la situation



D'après le schéma, on a : $7q^2 = 0{,}28$, donc : $q^2 = \dfrac{0{,}28}{7} = \dfrac{\frac{28}{100}}{7} = \dfrac{28}{100} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{4}{100}$.

D'où : $q = \sqrt{\dfrac{4}{100}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \dfrac{2}{10} = \underline{0{,}2}$ ou $q = -0{,}2$

Déterminons v_0 pour $q = 0{,}2$.



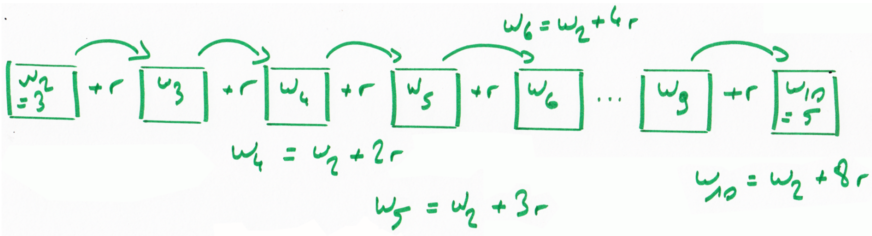
On a : $7 = 0{,}2^3 \times v_0$, donc : $v_0 = \dfrac{7}{0{,}2^3} = \dfrac{7}{\left(\dfrac{2}{10}\right)^3} = \dfrac{7}{\left(\dfrac{2^3}{10^3}\right)} = 7 \times \dfrac{1000}{8} = 7 \times 125 = \underline{875}$

Pour $q = -0{,}2$, nous aurions $v_0 = -875$.

Exercice 3

Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_2 = 3$ et $w_{10} = 5$.

Déterminons w_{15}.



D'après le schéma, on a : $w_{10} = w_2 + 8r$, donc : $5 = 3 + 8r$, d'où : $2 = 8r$.

En résultat : $r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

On a : $w_{15} = w_0 + 15r$ (formule explicite)

De plus : $w_{10} = w_0 + 10r$

Donc : $w_{15} - w_{10} = 5r$. Ainsi : $w_{15} = w_{10} + 5r = 5 + 5\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{4} + \frac{5}{4} = \underline{\frac{25}{4}}$

Exercice 4

On note S = 1 + 2 + 3 + ... + n.

1. On a : $S = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On a : $S = 1+2+3+\cdots+n$

$$S = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$

Donc : 2S = n(n+1). En résultat : $S = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Calculons S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 . On a : $S = \frac{99(99+1)}{2} = \frac{99(100)}{2} = \frac{9900}{2} = \underline{4950}$

4. Soit U la suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ telle que $U_0 = 5$. Calculons $U_0 + U_1 + \ldots + U_{100}$.

On a : $U_0 + U_1 + \cdots + U_{100} = 101 \times \frac{(U_0 + U_{100})}{2}$ avec $U_{100} = U_0 + 100 \times r = 5 + 100\left(\frac{1}{4}\right) = 5 + 25 = \underline{30}$

Donc : $U_0 + U_1 + \cdots + U_{100} = 101 \times \frac{(5+30)}{2} = 101\left(\frac{35}{2}\right) = \underline{\frac{3535}{2}}$

Exercice 5

On considère la suite (V_n) définie pour n ≥ 0 par $V_n = \frac{-n+6}{5}$.

Déterminons la nature de la suite, ainsi que ses caractéristiques.

Déterminons V_{n+1}

On a : $V_{n+1} = \frac{-(n+1)+6}{5} = \frac{-n-1+6}{5} = \frac{-n+6-1}{5} = \frac{-n+6}{5} - \frac{1}{5} = V_n - \frac{1}{5}$

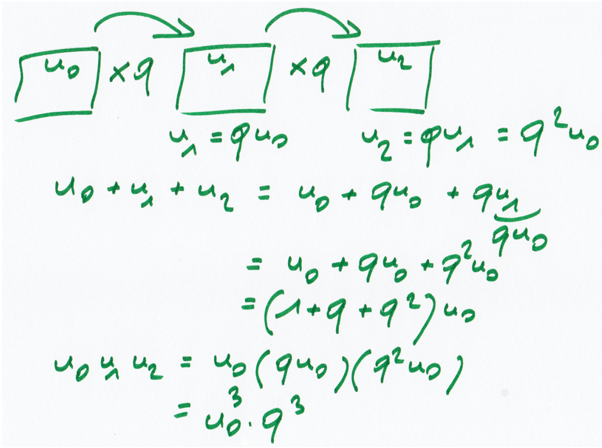
Donc : $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{5}$ avec $V_0 = \frac{-0+6}{5} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \underline{1{,}2}$

En conclusion, la suite V est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = 1{,}2$.

Problème

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $u_0 + u_1 + u_2 = 70$ et $u_0 \times u_1 \times u_2 = 1\,000$.

Traduisons l'énoncé par un schéma



1. D'après l'énoncé : $u_0 + u_1 + u_2 = 70$ et $u_0 \times u_1 \times u_2 = 1\,000$.

   Or, d'après le schéma : $u_0 + u_1 + u_2 = (1+q+q^2)u_0$ et $u_0 u_1 u_2 = q^3 u_0^{\,3}$

   Il en résulte le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} (1+q+q^2)u_0 = 70 & (L1) \\ q^3 u_0^{\,3} = 1000 & (L2) \end{cases}$

2. D'après (L2), on a : $qu_0 = 10$, d'où : $u_0 = \dfrac{10}{q}$

   En subsituant $\dfrac{10}{q}$ à u_0 dans (L1), on obtient : $(1+q+q^2)\dfrac{10}{q} = 70$, d'où : $10(1+q+q^2) = 70q$

   Ainsi : $10 + 10q + 10q^2 = 70q$, d'où : $1 + q + q^2 = 7q$.

   En résultat, q est solution de l'équation $q^2 - 6q + 1 = 0$.

3. Résolvons l'équation $q^2 - 6q + 1 = 0$ et déterminons les valeurs possibles de q.

   Déterminons le discriminant du trinôme $q^2 - 6q + 1$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(1) = 36 - 4 = 32 = 16 \times 2 \quad > 0$

   Le trinôme admet deux racines distinctes q_1 et q_2.

$$q_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$q_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{16\times 2}}{2(1)}$$

$$q_1 = \frac{6-4\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{q_1 = 3-2\sqrt{2}} \quad et \quad \underline{q_2 = 3+2\sqrt{2}}$$