en avant vers les limites de suites

suites arithmétiques

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0.

$$u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante. On a en effet $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r > 0$, donc : $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n.
De plus, lorsque le rang n tend vers l'infini, la valeur correspondante du terme de rang n tend vers l'infini.
On écrit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Ceci s'écrit aussi d'une manière simplifiée sous la forme : $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
Dans un tel cas, on dit que la suite arithmétique diverge et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou encore : $lim\, u_n = +\infty$. Ce vocabulaire vous deviendra peu à peu familier.

Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante car $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r < 0$, donc : $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n.
De plus, lorsque le rang n tend vers l'infini, la valeur correspondante du terme de rang n diminue inlassablement et tend vers moins l'infini.
On écrit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Ceci s'écrit aussi d'une manière simplifiée sous la forme : $u_n \to -\infty$ quand $n \to +\infty$.
Dans ce cas, on dit aussi que la suite arithmétique diverge et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou encore : $lim\, u_n = -\infty$.

suites géométriques

On considère la suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme $u_0 > 0$, dite à termes strictement positifs.

$$u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

On a en effet dans ce cas : $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q > 1$, donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1$ pour tout entier naturel n, d'où : $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n.

De plus, lorsque le rang n tend vers l'infini, la valeur correspondante du terme de rang n augmente à l'infini. On dit que u_n tend vers l'infini.

Dans un tel cas, on dit que la suite géométrique diverge et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou encore : $lim\, u_n = +\infty$.

Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$,, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

On a : $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q < 1$, donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$ pour tout entier naturel n, d'où : $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n.

De plus, lorsque le rang n tend vers l'infini, la valeur correspondante du terme de rang n diminue en se rapprochant de plus en plus de la valeur zéro. On dit que u_n tend vers la limite 0.

Dans un tel cas, on dit que la suite géométrique converge vers 0 et on écrit que sa limite est 0, c'est-à-dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ou encore : $lim\, u_n = 0$.

Généralisation

D'une manière plus générale, quelle que soit le signe de u_0 :

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0 et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Dans le cas contraire, si $q < -1$ ou $q > 1$, alors la suite (u_n) diverge.