Étude des suites numériques

Définition d'une suite numérique

Une suite numérique u ou (u_n) est une fonction qui associe à tout entier naturel n, un nombre réel noté u_n.

$$u : n \longmapsto u_n$$

On remarquera que la notation adoptée pour l'image de n par la suite u est différente de celle à laquelle nous étions habitués en seconde. Nous aurions noté $u(n)$.

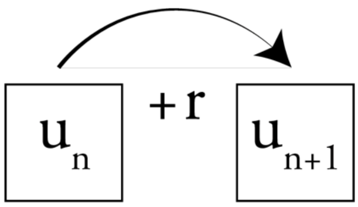
Une suite numérique est tout simplement une fonction qui est définie sur l'ensemble des entiers naturels ℕ ; les fonctions usuelles étudiées en seconde étaient généralement définies sur l'ensemble des réels ou sur un ou plusieurs intervalles définis sur l'ensemble des réels.

$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n$ sont appelés termes de la suite u ou (u_n).
u_0 est le terme de rang 0 de la suite. Ici, il s'agit du premier terme de la suite u.
u_1 est le terme de rang 1 de la suite.
u_2 est le terme de rang 2 de la suite.
u_n est le terme de rang n de la suite. Le terme suivant est noté u_{n+1}.
La suite numérique u associe aux nombres 0, 1, 2, 3, etc. les nombres réels u_0, u_1, u_2, u_3.
D'une manière très prosaïque, une suite numérique se comprend comme une suite de nombres.

Définition d'une suite arithmétique

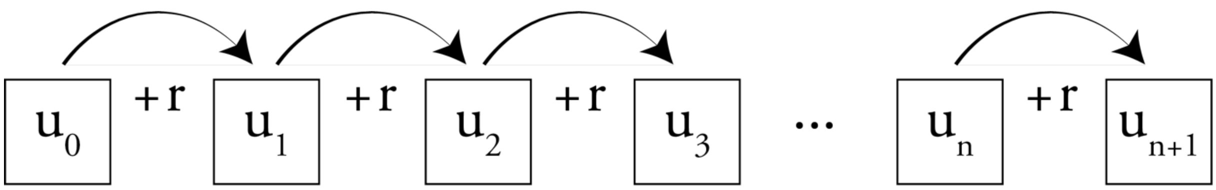
Une suite arithmétique u ou (u_n) de raison r est définie par une relation dite de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, le premier terme de la suite étant donné (généralement u_0) est donné.

Une image mentale simple pour comprendre



Le terme u_{n+1} de rang n+1 d'une suite arithmétique u ou (u_n) s'obtient en ajoutant au terme u_n de rang précédent n la raison r, laquelle est un nombre réel.

Une suite arithmétique u de raison r et de premier terme u_0 se représente d'une manière schématique comme ci-dessous :

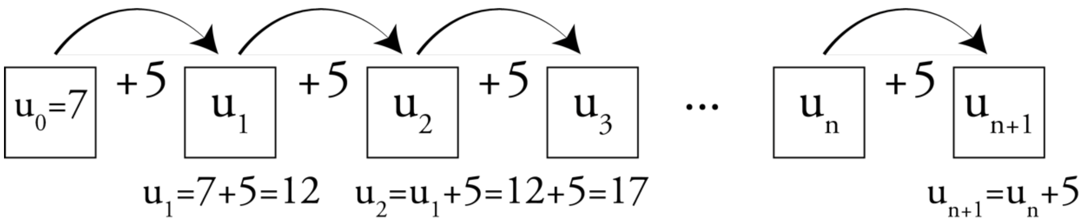


Exercice 1
On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_0 = 7$.
1. Traduire l'énoncé par un schéma.
2. Déterminer u_2.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Déterminer u_{27}.

Exercice 2
On considère la suite arithmétique u telle que $u_4 = 2$ et $u_7 = 30{,}5$.
1. Traduire l'énoncé par un schéma.
2. Déterminer la raison de la suite u et son premier terme u_0.

Résolution de l'exercice 1

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_0 = 7$.
1. Traduisons l'énoncé par un schéma.



2. Déterminons u_2.
   D'après le schéma, on a : $u_2 = 17$.

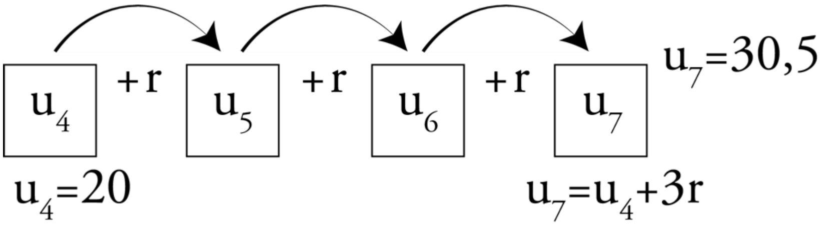
3. D'après le schéma également, on a : $u_{n+1} = u_n + 5$.

4. Sur le schéma, on remarque que : $u_1 = u_0 + 1 \times 5$
   $u_2 = u_0 + 2 \times 5$
   $u_3 = u_0 + 3 \times 5$
   On peut donc conjecturer aisément que : $u_n = u_0 + n \times 5$.
   Conclusion : $u_n = 7 + 5n$.

5. Déterminons u_{27}.
   Comme $u_n = 7 + 5n$, on a trivialement : $u_{27} = 7 + 5(27) = 7 + 135 = 142$..

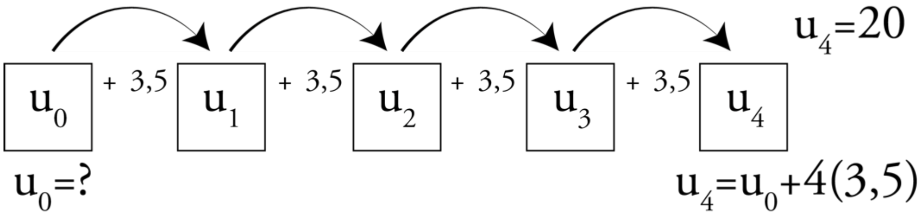
Résolution de l'exercice 2

1. Traduisons l'énoncé par un schéma.



2. D'après le schéma, on a : $u_7 = u_4 + 3r$.
   Donc : $30,5 = 20 + 3r$
   D'où : $3r = 10,5$
   En résultat : $r = \frac{10,5}{3} = 3,5$.

   Déterminons u_0.
   Schéma traduisant la situation



   D'après le schéma, on a : $u_4 = u_0 + 4 \times 3,5$.
   Donc : $20 = u_0 + 14$.
   Conclusion : $u_0 = 6$.