3 Second degré

Découvrir

1 Équation du second degré et forme canonique

1 $f(x) = x(-0{,}3x + 2{,}4)$

On résout $f(x) = 0$

$x = 0$ ou $-0{,}3x + 2{,}4 = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-2{,}4}{-0{,}3}$

$x = 0$ ou ou $x = 8$

La largeur du pont est égale à 8 m.

2 **a)** On développe l'expression donnée :

Pour tout $x \in [0;8]$:

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8$

$= -0{,}3(x^2 - 8x + 16) + 4{,}8$

$= -0{,}3x^2 + 2{,}4x - 4{,}8 + 4{,}8$

$= -0{,}3x^2 + 2{,}4x$

$= f(x)$

b) Pour tout $x \in [0;8]$, $-0{,}3(x-4)^2 \leqslant 0$ donc :

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 \leqslant 4{,}8$

La hauteur maximale de l'arche est 4,8 m.

3 **a)** La forme qui permet de résoudre les équations est la forme canonique :

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 = 0{,}9$

$-0{,}3(x-4)^2 = 0{,}9 - 4{,}8$

$-0{,}3(x-4)^2 = -3{,}9$

$(x-4)^2 = \dfrac{-3{,}9}{-0{,}3}$

$(x-4)^2 = 13$

$x - 4 = \sqrt{13}$ ou $x - 4 = -\sqrt{13}$

$x = 4 + \sqrt{13}$ ou $x = 4 - \sqrt{13}$

$\mathcal{S} = \left\{4 + \sqrt{13}\ ; 4 - \sqrt{13}\right\}$.

$-0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8 = 2{,}82$

$-0{,}3(x-4)^2 = -4{,}8 + 2{,}82$

$-0{,}3(x-4)^2 = -1{,}98$

$(x-4)^2 = \dfrac{-1{,}98}{-0{,}3}$

$(x-4)^2 = 6{,}6$

$x - 4 = \sqrt{6{,}6}$ ou $x - 4 = -\sqrt{6{,}6}$

$x = 4 + \sqrt{6{,}6}$ ou $x = 4 - \sqrt{6{,}6}$

$\mathcal{S} = \left\{4 + \sqrt{6{,}6}\ ; 4 - \sqrt{6{,}6}\right\}$.

b) À 0,9m au-dessus de l'eau, la largeur du pont est égale à $4 + \sqrt{13} - \left(4 - \sqrt{13}\right) = 2\sqrt{13}$ m, soit environ $7{,}21\text{ m} > 3{,}90$ m.

À 2,92 m au-dessus du niveau de l'eau, la largeur de l'arche est égale à :

$4 + \sqrt{6{,}6} - \left(4 - \sqrt{6{,}6}\right) = 2\sqrt{6{,}6}$ m, soit environ $5{,}14\text{ m} > 3$ m.

Le bateau pourra donc passer sous l'arche de ce pont.

2 Inéquation du second degré

1 La longueur de la ligne est 60 m :

$$L + 2\ell = 60$$

La zone de baignade doit avoir une superficie supérieure à 400 m² : $L\ell \geqslant 400$.

2 D'après la 1re équation, on obtient : $L = 60 - 2\ell$.

On remplace alors L dans l'inéquation :

$(60 - 2\ell)\ell \geqslant 400$

$60\ell - 2\ell^2 - 400 \geqslant 0$

3 **a)** On utilise la forme factorisée :

$-2(\ell - 20)(\ell - 10) \geqslant 0$

$\ell - 20 = 0$ ou $\ell - 10 = 0$

$\ell = 20$ ou $\ell = 10$

On dresse le tableau de signe correspondant à l'inéquation :

ℓ	0		10		20		60
$\ell - 20$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ell - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
-2		$-$		$-$		$-$	
$-2(\ell-20)(\ell-10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = [20\,;60]$.

b) La zone de baignade de Marie Pierre peut avoir pour dimensions :

$10 \leqslant \ell \leqslant 20$ et $20 \leqslant L \leqslant 40$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** $-x^2+120=0$ équivaut à $\left(\sqrt{120}-x\right)\left(\sqrt{120}+x\right)=0$

c'est-à-dire $x=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$

ou $x=-\sqrt{120}=-2\sqrt{30}$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{-2\sqrt{30}\,;2\sqrt{30}\right\}$.

b) $\frac{1}{4}x^2+3x+9=0$ équivaut à $\frac{1}{4}(x^2+12x+36)=0$ qui est équivalente à $\frac{1}{4}(x+6)^2=0$,

c'est-à-dire : $x+6=0$ soit $x=-6$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{-6\}$.

c) $3x^2+15x=0$ équivaut à $3x(x+5)=0$,

c'est-à-dire $x=0$ ou $x+5=0$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{0\,;-5\}$

d) $4x^2-4x+1=0$ équivaut à $(2x-1)^2=0$,

c'est-à-dire $2x-1=0$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4 **a)** $g(t)=-3(t^2+2t-6)$

En utilisant la méthode de la complétion du carré :

$$g(t)=-3[(t+1)^2-1^2-6]$$
$$g(t)=-3(t+1)^2+21$$

b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $-3(t+1)^2\leqslant 0$ donc $g(t)\leqslant 21$

g admet 21 pour maximum atteint pour $t=-1$.

7 **a)** Ici $a=-2$, $b=11$ et $c=-12$

$\Delta=11^2-4\times(-2)\times(-12)=25$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-11-\sqrt{25}}{2\times(-2)}=4$ et $x_2=\frac{-11+\sqrt{25}}{2\times(-2)}=\frac{3}{2}$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{2}\,;4\right\}$

b) Ici $a=1$, $b=1$ et $c=1$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$

$\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\varnothing$

c) Ici $a=0{,}25$, $b=-0{,}4$ et $c=0{,}16$

$$\Delta=(-0{,}4)^2-4\times0{,}25\times0{,}16=0$$

$\Delta=0$ donc l'équation a une unique solution :

$x_0=\frac{0{,}4}{2\times0{,}25}=0{,}8$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{0{,}8\}$.

8 **a)** Ici $a=-1$, $b=5$ et $c=14$

$$\Delta=5^2-4\times(-1)\times(14)=81$$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-5-\sqrt{81}}{2\times(-1)}=7$ et $x_2=\frac{-5+\sqrt{81}}{2\times(-1)}=-2$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{-2\,;7\}$.

b) Ici $a=9$, $b=6$ et $c=1$

$$\Delta=6^2-4\times9\times1=0$$

$\Delta=0$ donc l'équation a une unique solution :

$x_0=\frac{-6}{2\times9}=-\frac{1}{3}$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

c) Ici $a=0{,}4$, $b=2$ et $c=5$

$$\Delta=2^2-4\times0{,}4\times5=-4$$

$\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\varnothing$

9 1 est une solution évidente de l'équation.

L'autre solution vérifie $x'\times1=\frac{-6}{2}$.

Donc $x'=-3$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{-3\,;1\}$

10 2 est une solution évidente de l'équation.

L'autre solution vérifie $x'\times2=-\frac{6}{2}$.

Donc $x'=-\frac{3}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;2\right\}$.

11 -1 est une solution évidente de l'équation.

L'autre solution vérifie $x'\times(-1)=-\frac{1}{2}$. Donc $x'=\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;-1\right\}$.

14 **a)** $\Delta=7^2-4\times(-3)\times26=361$

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme f a deux racines :

$x_1=\frac{-7-\sqrt{361}}{2\times(-3)}=\frac{13}{3}$ et $x_2=\frac{-7+\sqrt{361}}{2\times(-3)}=-2$.

Donc le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{13}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\Delta=(-2)^2-4\times1\times9=-32$

$\Delta<0$ donc la fonction polynôme g n'a pas de racine.

D'où le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

c) $\Delta = 24^2 - 4 \times (-9) \times (-16) = 0$

$\Delta = 0$ donc la fonction polynôme *h* a une seule racine :

$x_0 = \dfrac{-24}{2 \times (-9)} = \dfrac{4}{3}$

Donc le tableau de signes de $h(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	

15 **a)** $\mathcal{S} = \left]-2\,;\,\dfrac{13}{3}\right[$ **b)** $\mathcal{S} = \varnothing$ **c)** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

16 $f(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 4x^2 + 6$

$f(x) = 4x + 7$

Louisa a tort : ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

17 **a)** $a = \dfrac{3}{2},\ b = -1,\ c = 4$

b) $a = -4,\ b = 0,\ c = 5$

c) $a = -1,\ b = 3,\ c = 0$

d) $a = 1,\ b = 2,\ c = -3$

18 $f(x) = -2x - 2x \times 3x + 4$

$f(x) = -6x^2 - 2x + 4$

Laura a raison : *f* est une fonction polynôme de degré 2.

19 On développe *f* :

$f(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x + 1 - x^2$

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

On factorise *f* :

$f(x) = (2x - 1 - x)(2x - 1 + x)$

$f(x) = (x - 1)(3x - 1)$

Ce sont les formes 1 et 3.

20 Tous les polynômes de la forme :

$a(x - 4)(x + 3)$ avec $a \neq 0$.

21 $-(-1)^2 + \dfrac{5}{4} \times (-1) + \dfrac{9}{4} = -1 - \dfrac{5}{4} + \dfrac{9}{4} = 0.$

-1 est une racine.

22 **a)** $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}$

b) $x^2 - (x^2 + 2x + 1) = -2x - 1$

c) $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{2}x - 1\right) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + x - \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}$

d) $\left(x + \dfrac{2}{5}\right)\left(x - \dfrac{2}{5}\right) = x^2 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

$= x^2 - \dfrac{4}{25}$

Les expressions **a)**, **c)** et **d)** correspondent à des expressions du second degré.

23 $f_2(x) = 3x^2 + 7 + 9x^2 - 24x + 16$

$f_2(x) = 12x^2 - 24x + 23$

$f_3(x) = 1 - 10x + 25x^2 - 25x^2$

$f_3(x) = -10x + 1$

Maya a tort : la fonction f_3 n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

23

Forme factorisée	Forme développée
$(2x + 3)(x + 1)$	$2x^2 + 7x + 3$
$(x + 3)(2x + 1)$	$-2x^2 + 5x - 3$
$(2x - 1)(3 - x)$	$2x^2 + 5x + 3$
$(3 - 2x)(x - 1)$	$-2x^2 + 7x - 3$

25 **a)** $f(x) = 2x^2 - 10x - 28$

b) 1re méthode :

Le produit est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-28}{2} = -14$

La somme est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-10}{2} = 5$

2e méthode :

Les racines de *f* sont les solutions de :

$$(x - 7)(2x + 4) = 0$$

c'est-à-dire : $x - 7 = 0$ ou $2x + 4 = 0$

c'est-à-dire : $x = 7$ ou $x = -2$

La somme des racines est : $7 + (-2) = 5$

Le produit des racines est : $7 \times (-2) = -14$

Wesley a raison.

26 **a)** $f(x) = (x - 5)(x - 4)$

b) $(x - 5)(x - 4) = 0$

$x - 5 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = 5$ ou $x = 4$

$\mathcal{S} = \{4\,;\,5\}$.

27 **a)** $f(x) = x[2(x + 1) - (x - 4)]$

$f(x) = x(x + 6)$

b) $f(x) = x^2 + 6x$

c) On utilise la forme factorisée :

$x = 0$ ou $x + 6 = 0$

$x = 0$ ou $x = -6$

$\mathcal{S} = \{0\ ;\ -6\}$.

28

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

29

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$x-\dfrac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\dfrac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
-3		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

30 $\dfrac{1}{2} > 0$ donc g est du signe de $(4t-1)(3t-2)$

t	$-\infty$		$\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$4t-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3t-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

31 **(2)** en développant le membre de droite on démontre l'égalité.

32 **a)** forme **(3)**

33 **a)** formes **(4)** et **(2)**

34 **a)** $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$

$12 > 0$: donc l'équation a deux solutions.

b) $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = -7$.

$-7 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{4}{3} = 0$ donc l'équation a une solution.

35 $\Delta = 4^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times 8 = 0$ donc l'équation a une unique solution.

Octave a tort.

36 $f(x) = 4\left(x^2 + 2x - \dfrac{5}{4}\right)$

$f(x) = 4\left[(x+1)^2 - 1^2 - \dfrac{5}{4}\right]$

$f(x) = 4\left[(x+1)^2 - \dfrac{9}{4}\right]$

37 **a)** $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$

$f(x) = 2(x^2 - x) + 3$

$f(x) = 2\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right] + 3$

$f(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \dfrac{1}{4} + 3$

$f(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2}$

b) $g(x) = 3x^2 + 6x + 12$

$g(x) = 3(x^2 + 2x) + 12$

$g(x) = 3\left[(x+1)^2 - 1^2\right] + 12$

$g(x) = 3(x+1)^2 + 9$

c) $h(t) = -5t^2 - 20t + 20$

$h(t) = -5(t^2 + 4t) + 20$

$h(t) = -5[(t+2)^2 - 2^2] + 20$

$h(t) = -5(t+2)^2 + 40$

38

Fonction	Forme canonique
$-2x^2 - 4x + 3$	$-2(x+1)^2$
$-2x^2 - 8x - 5$	$-2(x+2)^2 + 3$
$-2x^2 - 4x - 2$	$-2(x+1)^2 + 5$

39 **a)** $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$

$49 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 3$

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$.

b) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{1}{3} = 0$.

L'équation a une solution :

$x_0 = \dfrac{2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

c) L'équation peut s'écrire :

$x^2 + 2x - 35 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-35) = 144$.

$144 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{144}}{2 \times 1} = -7$ ou $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{144}}{2 \times 1} = 5$

$\mathcal{S} = \{-7\ ;\ 5\}$.

d) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 9 = -35$. $\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \varnothing$.

40 **a)** $\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 49$

$49 > 0$: l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times (-3)} = \dfrac{4}{3}$ ou $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{49}}{2 \times (-3)} = -1$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6} ; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$.

b) $\Delta = 4^2 - 4\times(-4)\times 15 = 256$

$256 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{256}}{2\times(-4)} = \frac{5}{2}$ ou $x_2 = \frac{-4+\sqrt{256}}{2\times(-4)} = -\frac{3}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}\right\}$.

c) $\Delta = 5^2 - 4\times 7\times 1 = -3$

$-3 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution.

$\mathcal{S} = \varnothing$.

d) $\Delta = 2{,}5^2 - 4\times 0{,}5\times(-7) = 20{,}25$

$20{,}25 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-2{,}5-\sqrt{20{,}25}}{2\times 0{,}5} = -7$

ou $x_2 = \frac{-2{,}5+\sqrt{20{,}25}}{2\times 0{,}5} = 2$

$\mathcal{S} = \{-7 ; 2\}$.

41 Nassim n'a pas simplifié ses solutions.

42 $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}$

$\Delta = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 4\times\left(-2\sqrt{3}\right) = 7+4\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{2} = 2$

$x_2 = \frac{2-\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = -\sqrt{3}$

43 **a)** $3x - 0{,}3x^2 = 0$ équivaut à $x(3-0{,}3x) = 0$.

Ce qui donne : $x = 0$ ou $3 - 0{,}3x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 10$

La largeur de l'arche au sol est 10 m.

b) $f(x) = -0{,}3(x^2 - 10x)$

$f(x) = -0{,}3(x-5)^2 + 0{,}3\times 5^2$

$f(x) = -0{,}3(x-5)^2 + 7{,}5$

On en déduit pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \leqslant 7{,}5$.

La hauteur maximale de l'arche est 7,5 m.

44 **a)** $\theta(0) = 3\times 0^2 - 12\times 0 + 40 = 40$

La température au début de l'observation est égale à 40 °C.

b) $\theta(t) = 3(t^2 - 4t) + 40$

$\theta(t) = 3[(t-2)^2 - 2^2] + 40$

$\theta(t) = 3(t-2)^2 + 28$

Pour tout t, $(t-2)^2 \geqslant 0$ et donc $3(t-2)^2 \geqslant 0$

On en déduit que pour tout t :

$$3(t-2)^2 + 28 \geqslant 28$$

La température minimale est 28 °C.

Le système de chauffage se déclenche lorsque $t - 2 = 0$, c'est-à-dire $t = 2$, après 2 h.

c) $3t^2 - 12t + 40 = 55$ cela revient à

$3t^2 - 12t - 15 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4\times 3\times(-15) = 324$

$324 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$t_1 = \frac{12-\sqrt{324}}{2\times 3} < 0$ (impossible t représente un temps) ou $t_2 = \frac{12+\sqrt{324}}{2\times 3} = 5$.

Le chauffage aura fonctionné entre 2 h et 5 h soit pendant 3 h.

45 **a)** $-\frac{4}{3}(t^2 - 30t + 225) + \frac{4}{3}\times 324$

$= -\frac{4}{3}t^2 + 40t - 300 + 432$

$= -\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132$

$= \mathrm{N}(t)$

Pour tout $t \geqslant 0$, $(t-15)^2 \geqslant 0$ donc $-\frac{4}{3}(t-15)^2 \leqslant 0$ et on en déduit que :

$\mathrm{N}(t) \leqslant \frac{4}{3}\times 324$

Le nombre maximal de bactéries est 432.

b) $-\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 132 = 2\,304$

$t_1 = \frac{-40-\sqrt{2\,304}}{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)} = 33$

$t_2 = \frac{-40+\sqrt{2\,304}}{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)} = -8 < 0$: impossible.

Il faudra 33 min pour que les bactéries aient toutes disparues.

46 Expressions **(1)** et **(3)**

47 **a)** Somme : $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{5}$

Produit : $\frac{c}{a} = -2$

b) Somme : $-\frac{b}{a} = \frac{2}{7}$ Produit : $\frac{c}{a} = -5$

c) Somme : $-\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ Produit : $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

d) Somme : $-\frac{b}{a} = 20$ Produit : $\frac{c}{a} = 14$

48 On calcule le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times 3\times 2 = -23$$

La fonction n'a donc pas de racine et n'admet pas de forme factorisée.

Marius a raison.

49 **a)** $x = 1$ est une solution évidente.
Le produit des deux racines est donné par $\frac{5}{-1}$
$x' \times 1 = -5$ donc $x' = -5$
$\mathcal{S} = \{1\,;\,-5\}$
b) $f(x) = -(x-1)(x+5)$

50 **a)** $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$
f ne se factorise pas.
b) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$
La racine double de g est $-\frac{-4}{2 \times (-1)} = -2$
$g(x) = -(x+2)^2$
c) $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (-2) = \frac{9}{4}$
h a deux racines :
$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{1}{4}} = -4$ ou $x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{1}{4}} = 2.$
$(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x-2)$
d) $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25$
k a deux racines :
$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 6$ ou $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 1$
$k(x) = -(x-1)(x-6)$

51 **a)** $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-18) = -23$
f ne se factorise pas
b) $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 25 \times 4 = 0$
g a une unique racine :
$x_0 = -\frac{-20}{2 \times 25} = \frac{2}{5}.$
$g(x) = 25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2$
c) $\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 = 25$
h a deux racines :
$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = 1$ ou
$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = \frac{-1}{4}$
$h(x) = -4(x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$
d) $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$
k a deux racines :
$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = -4$ ou $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = 1$
$k(x) = (2x+4)(x-1)$

52 **a)** $3 \times (-1)^2 - 1 - 2 = 0$
Donc -1 est une racine de g.
b) Le produit est donné par : $\frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$
c) $x' \times (-1) = -\frac{2}{3}$ donc $x' = \frac{2}{3}$

53 **a)** $f(5) = 3 \times 5^2 - 13 \times 5 - 10$
$= 3 \times 25 - 65 - 10$
$= 0$
b) La somme est donnée par $-\frac{b}{a} = \frac{13}{3}$
c) On en déduit que la seconde racine est :
$x' = \frac{13}{3} - 5 = -\frac{2}{3}$
$f(x) = 3(x-5)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

54 $-6\left(x + \frac{5}{6}\right)^2$
$= -6\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right)$
$= -6x^2 - 10x - \frac{25}{6}$
$= h(x)$
La forme canonique de Marie est correcte.
Recherche des racines de h :
$h(x) = 0$ équivaut à $x + \frac{5}{6} = 0$ d'après la forme canonique. h a donc une unique racine $x = -\frac{5}{6}$ et sa forme factorisée est donc bien égale à sa forme canonique. La réponse de Fannie est donc correcte aussi.

55 Le produit de deux nombres inverses est 1, or les produit des deux racines de l'équation **(1)** et de la **(3)** sont respectivement $\frac{1}{9}$ et -1, on peut donc éliminer ces équations de nos recherches.
Pour l'équation **(2)** :
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 7 \times 7 = -187$
L'équation n'a pas de solution.
La solution est l'équation **(4)**.

56 L'équation admet deux solutions inverses l'une de l'autre puisque leur produit donné par $\frac{c}{a}$ est 1. De plus, leur somme est égale à $-\frac{b}{a} = \frac{100}{7} > 0.$ Ainsi les deux racines sont de même signe puisque leur produit est positif et leur somme étant positive, ils sont donc positifs.
Armelle a raison.

57

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

58 **a)** Somme de deux nombres positifs (carré et 1) donc positif sur $\mathbb{R}$.
b) Somme de deux nombres négatifs (opposé d'un carré et -1) donc négatif sur $\mathbb{R}$.

59 Les inéquations sont la **(2)** et la **(3)**.

60 **a)**

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		2		11		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

61 **a)**

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-1[\cup]3\,;\,+\infty[$.

b) On calcule le discriminant :
$\Delta = (-7)^2 - 4\times1\times12 = 1 > 0$
L'expression a deux racines :
$t_1 = \dfrac{7-\sqrt{1}}{2} = 3$ et $t_2 = \dfrac{7+\sqrt{1}}{2} = 4$

t	$-\infty$		3		4		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;3[\cup]4\,;\,+\infty[$.

c) On calcule le discriminant :
$\Delta = 7^2 - 4\times(-1)\times(-6) = 25 > 0$
L'expression a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{25}}{-2} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{25}}{-2} = 1$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = [1\,;6]$.

d) On calcule le discriminant :
$\Delta = (-5)^2 - 4\times3\times3 = -11 < 0$

u	$-\infty$		$+\infty$
signe		$+$	

$\mathcal{S} = \varnothing$.

62 **a)** L'inéquation peut s'écrire :
$-2a^2 + 13a - 15 > 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = (13)^2 - 4\times(-2)\times(-15) = 49 > 0$
L'expression a deux racines :
$a_1 = \dfrac{-13-\sqrt{49}}{-4} = 5$ et $a_2 = \dfrac{-13+\sqrt{49}}{-4} = \dfrac{3}{2}$

a	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}\,;5\right[$.

b) L'inéquation peut s'écrire :
$x^2 + 2{,}1x - 3{,}52 \leqslant 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = 2{,}1^2 - 4\times1\times(-3{,}52) = 18{,}49 > 0$
L'expression a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-2{,}1-\sqrt{18{,}49}}{2} = -3{,}2$ et
$x_2 = \dfrac{-2{,}1+\sqrt{18{,}49}}{2} = 1{,}1$

x	$-\infty$		$-3{,}2$		$1{,}1$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = [-3{,}2\,;1{,}1]$.

c) L'inéquation peut s'écrire :
$10x^2 + 2x + 0{,}1 > 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = 2^2 - 4\times10\times0{,}1 = 0$
L'expression a une racine :
$x_1 = \dfrac{-2}{20} = -0{,}1$

x	$-\infty$		$-0{,}1$		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-0{,}1[\cup]-0{,}1\,;\,+\infty[$.

d) L'inéquation peut s'écrire :
$t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{13}{16} \leqslant 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\times1\times\dfrac{13}{16} = -3 < 0$

t	$-\infty$		$+\infty$
signe		$+$	

$\mathcal{S} = \varnothing$.

63 **a)** On calcule le discriminant :
$\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 25 > 0$
L'expression a deux racines :
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{4} = 2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[2\,;\,+\infty[$.

b) L'inéquation peut s'écrire : $x(5x-6)<0$

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]0\,;\frac{6}{5}\right[$.

c) On calcule le discriminant :

$\Delta=30^2-4\times(-3)\times(-75)=0$

L'expression a une racine :

$x_1=\dfrac{-30}{-6}=5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
signe		$-$	0	$-$	

$\mathcal{S}=\varnothing$

d) On calcule le discriminant :

$\Delta=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$

L'expression a une racine :

$x_1=\dfrac{-6}{-2}=3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe		$-$	0	$-$	

$\mathcal{S}=\mathbb{R}$

64 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-12)^2-4\times2\times18=0$

L'expression a une racine :

$x=\dfrac{12}{4}=3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\{3\}$ donc Hector a raison.

65 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-3)^2-4\times2\times4=-32<0$

L'expression est partout du signe de $a=2$.

Donc pour tout réel x, $2x^2-3x+4>0$

Tous les nombres sont solutions, ce qui correspond à l'affichage du logiciel $x=x$.

66 Une inéquation qui n'a qu'une seule solution est une inéquation telle que $\Delta=0$ et le signe de a est opposé à celui recherché.

Par exemple : $-x^2+2x-1\geqslant0$

67 On calcule le discriminant :

$\Delta=(-3{,}5)^2-4\times3\times(-2{,}5)=42{,}25>0$

L'équation a donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{3{,}5-\sqrt{42{,}25}}{6}=-\dfrac{1}{2}$ ou

$x_2=\dfrac{3{,}5+\sqrt{42{,}25}}{6}=\dfrac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{3}\right[$

68 **a)** Forme **factorisée**

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[-5\,;4]$

b) Forme **développée**

$f(x)\geqslant-60$ est équivalente à $3x^2+3x\geqslant0$ soit $3x(x+1)\geqslant0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=]-\infty\,;\,-1]\cup[0\,;\,+\infty[$

c) Forme **canonique**

Pour tout réel x, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant0$ on en déduit donc que pour tout réel x :

$3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{243}{4}\geqslant-\dfrac{243}{4}$

$\mathcal{S}=\mathbb{R}$

69 **a)** On remarque que $x=1$ est une racine évidente de B. La seconde racine vérifie :

$x'\times1=\dfrac{-10}{-2}=5$ donc $x'=5$

On obtient alors le tableau de signes :

x	0		1		5		10
signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\mathcal{S}=]1\,;5[$

c) L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit entre 11 et 49 objets.

70 **a)** $3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000>0$

$3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000=0$

$\Delta=256\,025$

$\mathrm{I}_1=\dfrac{-5-35\sqrt{209}}{6{,}4}<0$

$\mathrm{I}_2=\dfrac{-5+35\sqrt{209}}{6{,}4}\approx8{,}3$

I	0		I_2		$+\infty$
$3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-20\,000$		$-$	0	$+$	

$\mathcal{S}=[\mathrm{I}_2\,;\,+\infty[$: la plus petite valeur entière est 79 cm.

b) $3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-30\,000=0$

$\Delta=384\,025$

$\mathrm{I}_3=\dfrac{-5-\sqrt{\Delta}}{6{,}4}<0$

$\mathrm{I}_4 = \dfrac{-5+\sqrt{\Delta}}{6,4} \approx 96,0$

x	0	I_4	$+\infty$
$3,2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}-30\,000$	$-$	0	

$\mathcal{S} = [0\,;\mathrm{I}_4]$: la plus petite valeur entière est 96 cm.

c) Les étirements à exercer sont entre 79cm et 96 cm.

71 **1.** A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B

72 **1.** B et C
2. A et B
3. A, B et C

73 **1.** $\Delta = 2^2 - 4\times 2\times \dfrac{1}{2} = 0$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc l'affirmation est fausse.

2. $\Delta = b^2 - 4\times(-4)$
$\Delta = b^2 + 16$
Un carré est toujours positif donc $\Delta > 0$: l'affirmation est vraie.

3. $\Delta = b^2 - 4\times 4\times(-1) = b^2 + 16$
Un carré est toujours positif donc $\Delta > 0$, l'équation a donc deux solutions.

Le produit de ces solutions est égal à $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{4} < 0$: les solutions sont donc de signes contraires.
L'affirmation est fausse.

74 **a)** $f(1) = 3\times 1^2 + 6\times 1 - 9 = 0$ donc 1 est une racine de f

b) La somme des racines est égale à $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{3} = -2$

c) $1 + x' = -2$ donc $x' = -3$
la seconde racine de f est -3.

d) $f(x) = 3(x-1)(x+3)$

75 **a)** On développe l'expression donnée :
$2(x-2)^2 + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) + 1$
$= 2x^2 - 8x + 8 + 1$
$= 2x^2 - 8x + 9$
$= f(x)$

b) Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc on en déduit que $2(x-2)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$
f est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

76 **a)** $a = 2,\ b = -3,\ c = -2$

b) $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-2) = 25$

c) $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;2\right\}$.

77 **a)** $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-15) = 64$
$\Delta > 0$ l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{64}}{2\times 1} = -5$ ou $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{64}}{2\times 1} = 3$

$\mathcal{S} = \{-5\,;3\}$.

b)

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

78 **a)** $\Delta = (-40)^2 - 4\times 25\times 16 = 0$
l'équation a une unique solution :

$x_1 = \dfrac{40}{2\times 25} = \dfrac{4}{5}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

b)

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{5}$		$+\infty$
signe		$+$	0	$+$	

c) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]\dfrac{4}{5}\,;+\infty\right[$.

S'entraîner

80 **a)** $\Delta = 24^2 - 4\times 9\times 16$
$\Delta = 0$

L'équation a une unique solution $\dfrac{24}{2\times 9} = \dfrac{4}{3}$.

```
Delta = 0.0
la seule solution est 1.3333333333333333
```

Le programme affiche une valeur approchée de la solution.

b) $\Delta = 3,4^2 - 4\times 0,5\times 2$
$\Delta = 9,56$
L'équation a deux solutions

$\dfrac{-3,4+\sqrt{9,56}}{2\times 0,5} = -3,4 + \sqrt{9,56}$

$\dfrac{-3,4-\sqrt{9,56}}{2\times 0,5} = -3,4 - \sqrt{9,56}$

```
Delta = 9.559999999999999
les solutions sont -0.30807503325193863 et -6.491924966748061
```

Le programme affiche une valeur approchée des deux solutions et du discriminant.

81

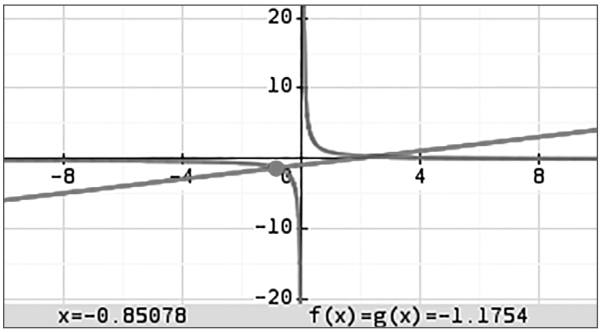
```
from math import*
a=float(input("Entrer a"))
b=float(input("Entrer b"))
c=float(input("Entrer c"))
alpha=-b/(2*a)
beta=(-b**2+4*a*c)/(4*a)
print("alpha=", alpha)
print("beta=", beta)
```

Pour $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ on obtient :

```
Entrer a2
Entrer b3
Entrer c4
alpha= -0.75
beta= 2.875
```

Soit $f(x) = 2(x + 0{,}75)^2 + 2{,}875$

83 **a)**



Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent avoir deux points d'intersection. Le premier a pour abscisse $x_1 \approx -0{,}85$ et le second $x_2 \approx 2{,}35$

b) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{x}$$

Dans $\mathbb{R}^*$ cette équation équivaut à $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)x = 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0$.

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{41}{16}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

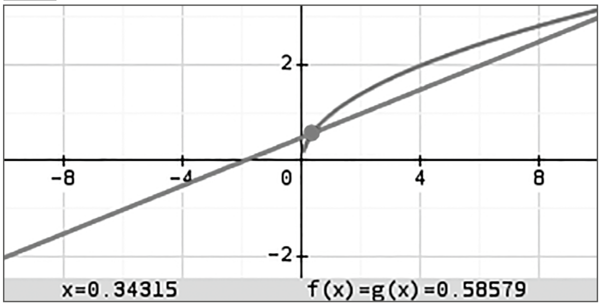
$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}$$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersections d'abscisses x_1 et x_2.

On vérifie que $x_1 \approx -0{,}85$ et $x_2 \approx 2{,}35$

84 **a)**



Les courbes semblent avoir deux points d'intersection d'abscisses $x_1 \approx 0{,}4$ et $x_2 \approx 11{,}7$

b) En raison de la racine carrée, l'équation n'a de sens que si $x \geqslant 0$.

De plus, pour x réel positif, $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ est positif.

Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.

De plus, x étant positif, $\sqrt{x}^2 = x$

L'équation est, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, équivalente à : $\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 = x$

c) L'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{8}} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2 \times \frac{1}{16}} = \frac{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{8}} = 6 + 4\sqrt{2}$$

Les deux solutions trouvées sont positives donc les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont $6 - 4\sqrt{2}$ et $6 + 4\sqrt{2}$.

85 **1. a)** $\Delta = b^2 - 4ac$

a et *c* sont de signes contraires donc leur produit est négatif et par conséquent $-4ac \geqslant 0$

Δ est donc la somme de deux nombres positifs donc est positif : l'équation aura donc au moins une solution.

b) Pour que l'équation ait deux solutions réelles distinctes, il faut que Δ soit strictement positif.

Or dans ce cas, $\Delta = 0$ si et seulement si $b = c = 0$.

Ainsi pour que l'équation ait deux solutions distinctes, il suffit que *b* ou *c* soit non nul.

2. $x^2 + 2x + 1 = 0$ est équivalente à $(x+1)^2 = 0$.

L'équation admet donc une unique solution $x = -1$ mais *a* et *c* sont tous les deux positifs.

86 **1. a)** Les nombres u et v sont les solutions de l'équation :

$$(x-u)(x-v)=0.$$

On développe le membre de gauche :

$$x^2-(u+v)x+uv=0.$$

Or $S=u+v$ et $P=uv$, on en déduit que u et v sont les solutions de :

$$x^2-Sx+P=0.$$

b) u et v sont solutions de $x^2-Sx+P=0$,
on en déduit que :

$$(x-u)(x-v)=x^2-Sx+P.$$

Par identification des coefficients, on obtient :
$S=u+v$ et $P=uv$.

c) u et v sont solutions de $x^2-Sx+P=0$ si, et seulement si, $S=u+v$ et $P=uv$.

2. a) Les nombres cherchés sont solutions de l'équation : $x^2-6x+1=0$.
On calcule le discriminant :
$\Delta=(-6)^2-4\times1\times1=32.$
Les solutions sont :
$x_1=\dfrac{6-\sqrt{32}}{2}$ et $x_2=\dfrac{6+\sqrt{32}}{2}$.

b) Les longueurs du rectangle sont les solutions de l'équation : $x^2-24x+25=0$.
On calcule le discriminant :
$\Delta=(-24)^2-4\times1\times25=476$
Les solutions sont :
$x_1=\dfrac{24-\sqrt{476}}{2}$ et $x_2=\dfrac{24+\sqrt{476}}{2}$.

87 **a)** $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
$=2^2-2\times(-11)=26$

b) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{26}{(-11)^2}=\dfrac{26}{121}$

88 f s'écrit sous la forme : $f(x)=a(x+4)(x-5)$.
De plus $f(3)=8$ ce qui est équivalent à :

$a\times7\times(-2)=8$, soit $a=-\dfrac{4}{7}$.

La fonction f cherchée est :

$$f(x)=-\frac{4}{7}(x+4)(x-5).$$

89 D'après leurs formes canoniques, f admet pour maximum 109 lorsque $x=56$ et g admet pour maximum $\dfrac{436\,001}{4\,000}=109{,}000\,25$ lorsque $x=\dfrac{561}{10}=56{,}1$.
Donc Rafaël a tort.

90 $N(t)=-5(t^2-10t)+1000$
$N(t)=-5(t-5)^2-5\times5^2+1000$
$N(t)=-5(t-5)^2+875$
Le nombre maximal de bactéries observables est 875 après 5 min.

91 $E(\alpha)=-0{,}2(\alpha^2-64\alpha)+1800$
$E(\alpha)=-0{,}2(\alpha-32)^2+0{,}2\times32^2+1800$
$E(\alpha)=-0{,}2(\alpha-32)^2+2\,004{,}8$
Pour tout $0\leqslant\alpha\leqslant90$, $-0{,}2(\alpha-32)^2\leqslant0$
On en déduit que, pour tout $0\leqslant\alpha\leqslant90$:
$-0{,}2(\alpha-32)^2+2\,004{,}8\leqslant2\,004{,}8$.
La quantité maximale d'énergie est atteinte pour une inclinaison de $32\ °$.

92 **a)** On résout : $\dfrac{v^2}{14}+2v=175$
c'est-à-dire : $\dfrac{v^2}{14}+2v-175=0$.
On calcule le discriminant :
$\Delta=2^2-4\times\dfrac{1}{14}\times(-175)=54$
Les solutions sont :
$v_1=\dfrac{-2-\sqrt{54}}{2\times\dfrac{1}{14}}=-14-21\sqrt{6}<0$
et $v_2=\dfrac{-2+\sqrt{54}}{2\times\dfrac{1}{14}}=-14+21\sqrt{6}$
Le véhicule roulait à $21\sqrt{6}-14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à l'instant du freinage, soit environ $37{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) $37{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=134{,}8\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
Il ne respectait pas la limitation de vitesse.

93 Soit L et ℓ les dimensions du terrain de Guillaume. D'après les données on sait que :
$2(L+\ell)=17$ et $L\ell=17$
On en déduit donc que L et ℓ sont les solutions de l'équation :

$$x^2-8{,}5x+17=0.$$

On calcule le discriminant :
$\Delta=(-8{,}5)^2-4\times1\times17=4{,}25$.
Les solutions sont :
$x_1=\dfrac{8{,}5-\sqrt{4{,}25}}{2}$ et $x_2=\dfrac{8{,}5+\sqrt{4{,}25}}{2}$
Le terrain de Guillaume a pour dimensions :
$\dfrac{8{,}5-\sqrt{4{,}25}}{2}$ m, soit environ 3,2m et $\dfrac{8{,}5+\sqrt{4{,}25}}{2}$ m soit environ 5,3m.

94 **a)** On résout :
$X^2-3X=0$
$X(X-3)=0$
$X=0$ ou $X=3$ soit : $x^2=0$ ou $x^2=3$
$\mathcal{S}=\left\{0\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}$.

b) On résout :

$$-\frac{1}{6}X^2 + 3X - 13,5 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{-1}{6} \times (-13,5) = 0$

L'équation a une solution unique : $X_0 = \frac{-3}{2\left(-\frac{1}{6}\right)} = 9$

soit $x^2 = 9$.

$\mathcal{S} = \{-3 ; 3\}$.

c) On résout :

$$3X^2 + 9X - 12 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{6} = -4$ ou $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{6} = 1$.

Soit $x^2 = -4$ (impossible) ou $x^2 = 1$

$\mathcal{S} = \{-1 ; 1\}$

d) On résout :

$$2X^2 + 40X + 128 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 40^2 - 4 \times 2 \times 128 = 576$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-40 - \sqrt{576}}{4} = -16$ ou

$x_2 = \frac{-40 + \sqrt{576}}{4} = -4$.

Soit $x^2 = -16$ ou $x^2 = -4$ (impossible)

$\mathcal{S} = \varnothing$.

95 **a)** On calcule le discriminant :

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 81 \times 1 = 0$

L'équation a une unique solution :

$x_0 = \frac{18}{2 \times 81} = \frac{1}{9}$

b) On pose $X = x^2$.

Cela revient à résoudre : $81X^2 - 18X + 1 = 0$.

D'après la question **a)** : $X = \frac{1}{9}$, soit $x^2 = \frac{1}{9}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right\}$.

c) On pose $Y = x^2$.

Cela revient à résoudre : $81Y^4 - 18Y^2 + 1 = 0$.

D'après la question **b)** : $Y = -\frac{1}{3}$ ou $Y = \frac{1}{3}$

Soit $x^2 = -\frac{1}{3}$ (impossible) ou $x^2 = \frac{1}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

96 L'équation 1 donne : $y = 49 - x$.

En substituant dans l'équation 2, on obtient :

$x^2 + (49 - x)^2 = 1225$

Soit $2x^2 - 98x - 1176 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 98^2 - 4 \times 2 \times (-1176) = 19\,012$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{98 - \sqrt{19\,012}}{4}$ ou $x_2 = \frac{98 + \sqrt{19\,012}}{4}$

On remplace alors pour trouver les valeurs de y :

$y = 49 - \frac{98 - \sqrt{19\,012}}{4} = \frac{98 + \sqrt{19\,012}}{4}$

ou $y = 49 - \frac{98 + \sqrt{19\,012}}{4} = \frac{98 - \sqrt{19\,012}}{4}$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{98 - \sqrt{19\,012}}{4} ; \frac{98 + \sqrt{19\,012}}{4}\right) ; \left(\frac{98 + \sqrt{19\,012}}{4} ; \frac{98 - \sqrt{19\,012}}{4}\right)\right\}$$

97 L'équation 1 donne : $x = y + 10$ soit en substituant dans l'équation 2 :

$(y + 10)y = -16$

soit $y^2 + 10y + 16 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 16 = 36$

L'équation a deux solutions :

$y_1 = \frac{-10 - \sqrt{36}}{2} = -8$ ou $y_2 = \frac{-10 + \sqrt{36}}{2} = -2$

On remplace pour trouver les valeurs de x correspondantes :

$x_1 = -8 + 10 = 2$ et $x_2 = -2 + 10 = 8$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \{(2 ; -8) ; (8 ; -2)\}.$$

98 La seconde équation du système peut s'écrire :

$\frac{x + y}{xy} = -0,3$ soit en utilisant l'équation 1 :

$x + y = -0,3 \times (-2,5)$

On en déduit : $y = 0,75 - x$

L'équation 1, s'écrit alors : $x(0,75 - x) = -2,5$

soit $-x^2 + 0,75x + 2,5 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 0,75^2 - 4 \times (-1) \times 2,5 = 10,562\,5$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-0,75 - \sqrt{10,562\,5}}{-2} = 2$

ou $x_2 = \frac{-0,75 + \sqrt{10,562\,5}}{-2} = -1,25$

Ce qui donne : $y_1 = 0,75 - 2 = -1,25$

et $y_2 = 0,75 + 1,25 = 2$

Le système a deux couples solutions :

$$\mathcal{S} = \{(2 ; -1,25) ; (-1,25 ; 2)\}.$$

99 En utilisant la formule de la vitesse moyenne, $v = \dfrac{d}{t}$, les données de l'exercice se traduisent par :

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{195}{v_1} \\ t_1 - 1 = \dfrac{195}{v_1 + 4} \end{cases}$$

En substituant t_1 dans la seconde équation, on obtient :

$\dfrac{195}{v_1} - 1 = \dfrac{195}{v_1 + 4}$,

soit $-v_1^2 - 4v_1 + 780 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 780 = 3126$

L'équation a deux solutions :

$v_1 = \dfrac{4 - \sqrt{3126}}{-2}$ ou $v_1 = \dfrac{4 + \sqrt{3126}}{-2} < 0$: impossible

La vitesse du premier cycliste est $\dfrac{\sqrt{3126} - 4}{2}$ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit environ $26\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et celle du second cycliste est $\dfrac{\sqrt{3126} + 4}{2}$ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit environ $30\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

100 **1. a)** Après découpage, l'aire du carré de côté $x + 5$ est égale à l'aire du rectangle de départ ADFE (39) à laquelle s'ajoute l'aire du carré de côté 5.

soit : $(x + 5)^2 - 25 = 39$

b) $(x + 5)^2 = 64$ équivaut à $x + 5 = 8$ ou $x + 5 = -8$ soit $x = 3$ ou $x = -13 < 0$ car x est une longueur.

2. a) On calcule le discriminant :

$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times (-39) = 256$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{256}}{2} = -13$ ou $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{256}}{2} = 3$

b) On retrouve bien les mêmes solutions.

101 On note a et b les longueurs des côtés adjacents à l'angle droit. On sait que $a > 0$ et $b > 0$

D'après les données, on obtient le système :

$$\begin{cases} ab = 429 \times 2 \\ a^2 + b^2 = 72{,}5^2 \end{cases}$$

L'équation 1 donne : $b = \dfrac{858}{a}$ ce qui en substituant dans l'équation 2 :

$a^2 + \dfrac{736\,164}{a^2} = 5\,256{,}25$

Soit : $a^4 - 5\,256{,}25a^2 + 736\,164 = 0$

On pose $\text{X} = a^2$

Cela revient à résoudre :

$$\text{X}^2 - 5\,256{,}25\text{X} + 736\,164 = 0$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = (-5\,256{,}25)^2 - 4 \times 736\,164 = 24\,683\,508{,}062\,5$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{5\,256{,}25 - 4\,968{,}25}{2} = 144$ ou

$x_2 = \dfrac{5\,256{,}25 + 4\,968{,}25}{2} = 5112{,}25$

Soit $a^2 = 144$ donc $a = 12$ puisque $a > 0$ et alors $b = \dfrac{858}{12} = 71{,}5$

Soit $a^2 = 5112{,}25$ donc $a = 71{,}5$ puisque $a > 0$ et alors $b = \dfrac{858}{71{,}5} = 12$

Le périmètre du triangle est :

$71{,}5 + 12 + 72{,}5 = 166$ m

102 M est un point de la droite d donc M a pour coordonnées $(x\,;\,2x + 4)$

De plus, on veut que $\text{OM} = \sqrt{5}$ soit :

$$\sqrt{x^2 + (2x + 4)^2} = \sqrt{5}$$

ce qui équivaut à :

$$x^2 + (2x + 4)^2 = 5$$

c'est-à-dire : $5x^2 + 16x + 11 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \times 5 \times 11 = 36$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-16 - \sqrt{36}}{2 \times 5} = -2{,}2$ et $x_2 = \dfrac{-16 + \sqrt{36}}{2 \times 5} = -1$

Les points M ont donc pour coordonnées $(-2{,}2\,;\,-0{,}4)$ et $(-1\,;\,2)$.

103 **a)** $\text{D}(x) = 4\pi - \pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \pi\left(\dfrac{4 - x}{2}\right)^2$

$\text{D}(x) = \pi\left[4 - \dfrac{x^2}{4} - \left(4 - 2x + \dfrac{x^2}{4}\right)\right]$

$\text{D}(x) = \pi\left(2x - \dfrac{x^2}{4}\right)$

$\text{D}(x) = \dfrac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$.

b) Par la méthode de la complétion du carré :

$$\text{D}(x) = -\frac{\pi}{2}(x - 2)^2 + 2\pi.$$

L'aire de la partie bleue est maximale lorsque M est le milieu de $[\text{AB}]$ et $\text{D}_{\max} = 2\pi$.

c) On doit avoir : $\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) \leqslant \dfrac{3}{2}\pi$

c'est-à-dire $x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$ et $-x^2 + 4x - 3 \leqslant 0$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.

• $x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 8$; $x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

x	0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		4
$x^2 - 4x + 2$		+	0	−	0	+	

• $-x^2 + 4x - 3 = 0$.

$\Delta = 4$; $x_3 = 1$ et $x_4 = 3$.

x	0		1		3		4
x^2-4x+2		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : Charlotte doit placer le point M tel que : $x \in \left[2-\sqrt{2}\,;1\right] \cup \left[3\,;2+\sqrt{2}\right]$.

104 **a)** Soit p le prix de vente à la tonne.
Comme il y a équilibre pour 25 tonnes, $25p = 25^2 + 632 \times 25 + 1\,075$ donc $p = 700$ €.
b) $\mathrm{B}(q) = 700q - \mathrm{C}(q) = -q^2 + 68q - 1075$
c) L'activité est rentable lorsque $\mathrm{B}(q) \geqslant 0$.
On cherche les racines de $\mathrm{B}(q)$. $\Delta = 324$, il y a donc deux racines : 25 (déjà connue), et 43.
Comme le coefficient de x^2 est négatif, $\mathrm{B}(q)$ est positif entre les racines. L'activité est rentable pour une production comprise entre 25 et 43 tonnes de papier.

105 **a)** $x \in [0{,}8\,;12]$
b) L'aire de la partie restante est :
$(12-x)(30-x) \geqslant 280$ ce qui est équivalent à : $360 - 12x - 30x + x^2 \geqslant 280$,
soit $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$
c) $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444$
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{42-\sqrt{1444}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{42+\sqrt{1444}}{2} = 40$

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi comme $x \in [0{,}8\,;12]$, on en déduit que les largeurs possibles du chemin sont comprises entre 0,8 m et 2 m.

106 **1.** L'inéquation est équivalente à :
$x^2 - 1000x - 8\,000 \geqslant 0$
$\Delta = (-1000)^2 - 4 \times 1 \times (-8\,000) > 0$
Par conséquent, l'inéquation admet des solutions.
2. a) Cet algorithme permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur positive dont l'image par h dépasse le nombre saisi pour M.
b) On obtient 1008 : 1008 est le plus petit entier positif tel que $h(1008) \geqslant 8\,000$.

107 **a) Faux :** sur $[1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant 0$
b) Faux : les nombres de l'intervalle $[-2\,;0]$ ont une image positive.
c) Vrai : Tous les nombres de l'intervalle $[0\,;1]$ ont une image positive.
d) Faux : Les nombres de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ ont aussi une image négative.
e) Faux : $]-1\,;1[\subset]-2\,;1[$ donc leur image est un nombre positif.

108 P_1 est vraie
P_2 est vraie
Réciproque de P_1 : Si $\Delta < 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$
La réciproque est fausse, $f(x)$ peut être strictement négatif.
Réciproque de P_2 : Si $\Delta > 0$, alors $ac < 0$
La réciproque est fausse.

Organiser son raisonnement

109 On note h et c les côtés du triangle.
$h + c = 4{,}9$ et $h^2 + c^2 = 3{,}5^2$
Cela revient à résoudre l'équation :
$$h^2 + (4{,}9-h)^2 = 3{,}5^2$$
ce qui est équivalent à : $2h^2 - 9{,}8h + 11{,}76 = 0$
$\Delta = 1{,}96$
Les solutions sont :
$h_1 = \dfrac{9{,}8-1{,}4}{4} = 2{,}1$ ou $h_2 = \dfrac{9{,}8+1{,}4}{4} = 2{,}8$
Les côtés du triangle sont 2,1 et 2,8.
$h + c = 4{,}9$ et $3{,}5^2 + c^2 = h^2$
Cela revient à résoudre l'équation :
$$3{,}5^2 + (4{,}9-h)^2 = h^2$$
$$36{,}26 - 9{,}8h = 0$$
$$h = 3{,}7$$
Les côtés du triangle sont 3,7 et 1,2.

110 **a)** Méthode d'Abdel : il a calculé le discriminant de f pour déterminer les racines et en déduire ensuite la forme factorisée.
Avantage : cette méthode convient pour toutes les fonctions
Inconvénient : les calculs ne sont pas « astucieux ».
Bélinda : elle a trouvé une racine évidente de f puis a trouvé la forme factorisée à partir de cette racine.
Avantage : les calculs peuvent tous être faits à la main, et on en déduit rapidement la factorisation
Inconvénient : il n'est pas toujours facile de trouver une racine évidente.
Charlotte : elle a écrit f sous forme canonique, et a alors trouvé la forme factorisée de f puisque ce sont les mêmes.
Avantage : la méthode est rapide, car f a la même forme canonique et factorisée.

Inconvénient : il faut ensuite trouver comment factoriser la forme canonique dans le cas général.
Dominic : il a commencé à remarquer que les coefficients sont des multiples de 5, puis reconnait une identité remarquable ce qui lui permet de déterminer la factorisation, sans passer par la recherche des racines.
Avantage : il obtient directement la forme factorisée
Inconvénient : on ne peut l'utiliser que si la factorisation se fait à partir d'une identité remarquable.
b) La stratégie d'Abdel et celle de Charlotte auraient pu être utilisées mais pas les deux autres car les deux racines de *f* sont irrationnelles et la factorisation ne se fait pas à l'aide d'une identité remarquable.

111 On note x la largeur de la croix rouge.
L'aire de la partie rouge est donnée par :
$2x+3x-x^2=5x-x^2$
L'aire du drapeau est : $3\times 2=6$
L'aire de la croix rouge et la partie blanche ont la même aire, si $5x-x^2=\dfrac{6}{2}$ ce qui donne :
$-x^2+5x-3=0$.
On calcule le discriminant :
$\Delta=5^2-4\times(-1)\times(-3)=13$
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{-2}=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ou
$x_2=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{-2}=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$
Or $x_1\approx 4{,}3$: impossible, car les dimensions du drapeau sont 2 m et 3 m.
La largeur de la croix rouge doit donc être égale à $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ m.

112 On note x la longueur, en cm, du côté du carré le plus petit. Les deux autres côtés ont pour longueur $x+2$ et $x+4$.
L'aire se calcule en faisant :
$$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=515,$$
équation qui est équivalente à : $3x^2+12x-495=0$
On calcule le discriminant :
$\Delta=12^2-4\times 3\times(-495)=6\,084$
L'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-12-\sqrt{6\,084}}{2\times 3}=-15$ ou
$x_2=\dfrac{-12+\sqrt{6\,084}}{6}=11$
x représente une longueur donc $x>0$.
Ainsi la longueur du plus petit carré est 11 cm et la longueur du polygone est donnée par :
$11+13+15=39$ m.

113 On calcule le discriminant :
$$\Delta=(m-1)^2-4m\times(-1)$$
$$\Delta=m^2-2m+1+4m$$
$$\Delta=m^2+2m+1$$
$$\Delta=(m+1)^2$$
Si $m=-1$, alors $\Delta=0$, l'équation a une unique solution.
Si $m\neq -1$, alors $\Delta>0$, l'équation a deux solutions.

114 On note *n* le nombre de personnes du groupe d'amis et le gain par personne.
L'énoncé se traduit par le système :
$\begin{cases} nx=2\times 10^6 \\ (n-5)(x+20\,000)=2\times 10^6 \end{cases}$
On obtient l'équation :
$\dfrac{-5x^2-10^5x+4\times 10^{10}}{x}=0$
$x\neq 0$, ce qui équivaut à $-5x^2-10^5x+4\times 10^{10}=0$
On calcule le discriminant :
$\Delta=(-10^5)^2-4\times(-5)\times(4\times 10^{10})$
$\Delta=10^{10}\times 81$
Les solutions sont :
$x_1=\dfrac{10^5-\sqrt{81\times 10^{10}}}{2\times(-5)}=8\times 10^4$ ou
$x_2=\dfrac{10^5+\sqrt{81\times 10^{10}}}{-10}=-10^5<0$
Le nombre d'amis du groupe est donné par :
$\dfrac{2\times 10^6}{8\times 10^4}=\dfrac{200}{8}=25.$
Il y avait 25 amis dans le groupe et chacun a gagné 80 000 €.

115 On note L et ℓ respectivement la longueur et la largeur du rectangle.
Les données se traduisent par :
$\begin{cases} L+\ell=\dfrac{k}{2} \\ L\ell=k \end{cases}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ L\ell=k \end{cases}$
En substituant dans la seconde équation :
$\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ \left(\dfrac{k}{2}-\ell\right)\ell=k \end{cases}$ soit, $\begin{cases} L=\dfrac{k}{2}-\ell \\ -\ell^2+\dfrac{k}{2}\ell-k=0 \end{cases}$
On résout la seconde équation, en calculant le discriminant :
$\Delta=\left(\dfrac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)\times(-k)=\dfrac{k^2-16k}{4}$
Pour que cette équation ait des solutions, il faut que Δ soit positif.
$\dfrac{k^2-16k}{4}=\dfrac{k(k-16)}{4}$

k	0		16		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	

Ainsi, l'équation aura des solutions si $k \geqslant 16$.

116 **a)** $g(2) = 2 \times 2^3 - 7 \times 2^2 + 2 + 10$

$g(2) = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 12$

$g(2) = 0$

Donc 2 est une racine évidente de g.

b) On développe et on identifie les coefficients :

$$(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 + 2 \times 2 \\ c = 1 + 2 \times (-3) \\ c = \dfrac{10}{-2} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$

Et donc $g(x) = (x-2)(2x^2 - 3x - 5)$

c) On utilise la forme factorisée :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

On calcule le discriminant pour l'équation du second degré : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49$

$\Delta > 0$, l'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -1 \text{ ou } x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$$

L'équation a trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1 ; \dfrac{5}{2} ; 2\right\}$.

117 **a)**

```
n=float(input("Entrer la partie entière de la racine cherchée"))
k=float(input("Entrer k"))
a=n
for i in range (0,5):
    a=1/2*(a+k/a)
```

```
>>> a
1.414213562373095
```

b) $f(x) = 3(x^2 + 2x) + 5$

$f(x) = 3(x+1)^2 - 3 + 5$

$f(x) = 3(x+1)^2 + 2$

c) $f(x) = 8$ s'écrit $3(x+1)^2 + 2 = 8$ est équivalent à $(x+1)^2 = \dfrac{8-2}{3}$, c'est-à-dire : $(x+1)^2 = 2$.

d) $(x+1)^2 = 2$ est équivalent à $x + 1 = \sqrt{2}$ ou $x + 1 = -\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} - 1$ ou $x = -\sqrt{2} - 1$.

```
>>> a-1
0.4142135623730949

>>> -a-1
-2.414213562373095
```

118 On note x la longueur en cm du segment consacrée au carré. Cela correspond à son périmètre. On en déduit donc que son aire est donnée par $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$

La longueur consacrée au disque est $100 - x$.

Elle correspond au périmètre du cercle, soit :

$100 - x = 2\pi r$ où r est le rayon du cercle.

L'aire du disque est donnée par :

$$\pi \times \left(\frac{100 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(100 - x)^2}{4\pi}$$

a) Lorsque la figure évolue de gauche à droite, x augmente de 0 à 100, donc l'aire du carré augmente. Lorsque la figure évolue de gauche à droite, x augmente de 0 à 100 on en déduit que $100 - x$ diminue de 100 à 0. On peut donc conclure que l'aire du disque diminue.

b)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{10\,000 - 200x + x^2}{4\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 + 40\,000 - 800x}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi + 4}{16\pi}\left(x^2 - \frac{800}{\pi + 4}x\right) + \frac{40\,000}{16\pi}$$

$$= \frac{\pi + 4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi + 4}\right)^2 - \frac{\pi + 4}{16\pi} \times \left(\frac{400}{\pi + 4}\right)^2 + \frac{2\,500}{\pi}$$

$$= \frac{\pi + 4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi + 4}\right)^2 - \frac{10\,000}{\pi(\pi + 4)} + \frac{2\,500}{\pi}$$

$$= \frac{\pi + 4}{16\pi}\left(x - \frac{400}{\pi + 4}\right)^2 + \frac{2\,500}{\pi + 4}$$

D'après la forme canonique, la somme des deux aires admet un minimum et on en déduit qu'elle diminue jusqu'à $x = \dfrac{400}{\pi + 4}$ puis qu'elle augmente.

119 $nx = 180$, donc $n = \dfrac{180}{x}$.

$(x-2)(n+3) = 180$

$(x-2)\left(\dfrac{180}{x} + 3\right) = 180$

$(x-2)(180 + 3x) = 180x$

$3x^2 - 6x - 360 = 0$

$x^2 - 2x - 120 = 0$

$\Delta = 480 \quad x_1 = -10$ et $x_2 = 12$.

Le montant de son remplacement est 12 € par mois pendant 15 mois.

120 C'est une équation produit. Chaque facteur est de la forme :

$x^2 - nx + 10n = 0$ avec $1 \leqslant n \leqslant 40$

Le discriminant de cette équation est de la forme :

$$\Delta = (-n)^2 - 4 \times 10n$$

$$\Delta = n(n - 40)$$

On établit le signe de Δ :

n	1		40
		$-$	0

Ainsi les 39 premiers discriminants sont strictement négatifs et les équations correspondantes n'ont pas de solution.

Pour la dernière, $x^2-40x+400=0$, $\Delta=0$: l'équation a une unique solution : $\frac{40}{2}=20$

L'équation donnée au départ a donc une unique solution : $\mathcal{S}=\{20\}$.

121 **1. a)** Toutes les puissances de 1 sont égales à 1, donc $P(1)=1^n-1=0$.

b) $Q(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$

En développant $(x-1)Q(x)$, on obtient :

$x^n-1=P(x)$.

2. a) $h(a)=a^n-a^n=0$

b) $h(x)=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}x+a^n)$

3. a) $f(x)=x^3-2^3$

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$

$g(x)=x^4-3^4$

$g(x)=(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)$

Pour factoriser $g(x)$ on aurait pu remarquer que $(x^2)^2-(9)^2$ avec l'identité remarquable, on aurait obtenu :

$g(x)=(x^2-9)(x^2+9)$.

On applique la même méthode pour factoriser x^2-9 et on obtient :

$g(x)=(x-3)(x+3)(x^2+9)$.

b) On utilise les formes factorisées :

$f(x)=0$ s'écrit $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x-2=0$ ou $x^2+2x+4=0$

La première équation donne $x=2$.

Pour la seconde équation, on calcule le discriminant :

$\Delta=4-4\times4=-12$: la seconde équation n'a pas de solution.

L'équation $f(x)=0$ a une unique solution $x=2$.

$g(x)=0$ s'écrit $(x-3)(x+3)(x^2+9)=0$.

$x-3=0$ ou $x+3=0$ ou $x^2+9=0$, soit $x=3$

$x=-3$ ou $x^2=-9$.

La dernière équation n'a pas de solution.

L'équation $g(x)=0$ a donc deux solutions : $\mathcal{S}=\{-3\,;3\}$

122 On note x la longueur en m du petit cube.

Les données se traduisent par l'équation :

$(4+x)^3-x^3=208$

On développe $(4+x)^3$ en remarquant que

$$\begin{aligned}(4+x)^3&=(4+x)(4+x)^2\\&=(4+x)(16+8x+x^2)\\&=64+32x+4x^2+16x+8x^2+x^3\\&=x^3+12x^2+48x+64\end{aligned}$$

$(4+x)^3-x^3=208$ est équivalente à :

$12x^2+48x-144=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta=48^2-4\times12\times(-144)=9\,216$ l'équation a deux solutions :

$x_1=\frac{-48-\sqrt{9\,216}}{2\times12}$ ou $x_2=\frac{-48+\sqrt{9\,216}}{2\times12}$

$x_1=-6$ ou $x_2=2$

x est une longueur donc c'est un nombre positif, par conséquent, la longueur de l'arête du grand cube est $4+2=6$ m.

123

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\phi^2=\phi+1$ $\quad\phi^6=8\phi+5$

$\phi^3=2\phi+1$ $\quad\phi^7=13\phi+8$

$\phi^4=3\phi+2$ $\quad\phi^8=21\phi+13$

$\phi^5=5\phi+3$

$\phi^{21}=(\phi^7)^3+(13\phi+8)^2(13\phi+8)$

On reconnait les termes de la suite de Fibonacci.

$\phi^{2019}=F_{2019}+F_{2018}$

124 Les données se traduisent par :

$$x^3+56=(x+2)^3$$

En développant le membre de droite de l'équation, on obtient :

$x^3+56=x^3+2x^2+4x+8$ qui est équivalente à $2x^2+4x-48=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta=4^2-4\times2\times(-48)=400$ l'équation a deux solutions :

$x_1=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times2}$ ou $x_2=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times2}$

$x_1=-6$ ou $x_2=4$

x est une longueur donc la longueur de l'arête est 4 cm.

125 **Partie A**

L'état de saturation est atteint pour 3 h de travail.

Partie B

```
Saisir t
y ← −(200/9)t + 200/3
Si y ⩾ 0
    Afficher « souhait »
    Sinon
    Afficher « rejet »
Fin Si
```

Partie C

a) On doit résoudre $h(x)=100$.

$-\frac{1}{36}x^2+\frac{10}{3}x-100=0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{36}\right) \times (-100) = 0$$

L'équation a une solution $x = \dfrac{-\dfrac{10}{3}}{2 \times \left(-\dfrac{1}{36}\right)} = 60$

La « saturation » est atteinte à 60 min.

b) On doit résoudre $h(x) \geqslant 60$.

$-\dfrac{1}{36}x^2 + \dfrac{10}{3}x - 60 \geqslant 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{36}\right) \times (-60) = \dfrac{40}{9}$

Les deux racines sont :

$x_1 = \dfrac{-\dfrac{10}{3} - \sqrt{\dfrac{40}{9}}}{2 \times \left(-\dfrac{1}{36}\right)} = 60 + 12\sqrt{10} > 60$

Ou $x_2 = \dfrac{-\dfrac{10}{3} + \sqrt{\dfrac{40}{9}}}{2 \times \left(-\dfrac{1}{36}\right)} = 60 - 12\sqrt{10}$

On dresse le tableau de signes :

x	0		$60 - 12\sqrt{10}$		60
Signe		$-$	0	$+$	

La personne est dite heureuse à partir de $60 - 12\sqrt{10}$ min, soit environ 22 min.

Exploiter ses compétences

126 Notons h la hauteur d'eau en m.

Déterminons le volume d'eau de la piscine.

Volume d'eau dans la partie de la piscine à fond plan (parallélépipède rectangle) :

$12 \times 12{,}5 \times h = 150h\ \text{m}^3$

La partie à fond incliné est un prisme droit, calculons son volume :

$\mathscr{A}_{\text{AFB}} \times 12 = \dfrac{h \times 12{,}5}{2} \times 12 = 75h\ \text{m}^3$

Volume d'eau de la piscine :

$150h + 75h = 225h\ \text{m}^3$

Le montant à payer pour le remplissage de la piscine est donné par : $225h \times 3 = 675h$

Les contraintes liées au coût donnent :

$675h \leqslant 1200$

$h \leqslant \dfrac{1200}{675}$

La hauteur maximale de la piscine est $\dfrac{16}{9}$ m, soit environ 1,77 m.

127 On note n la plus petite dimension de l'aquarium.

Les autres dimensions sont n, $n+1$ et $n+2$.

Les données du document 2 permettent d'obtenir l'équation :

$n(n+1)(n+2) = 4 \times (4n + 4(n+1) + 4(n+2))$

Ce qui est équivalent à l'équation :

$$n^3 + 3n^2 - 46n - 48 = 0$$

On remarque que -1 est une racine évidente, on peut donc factoriser le membre de gauche par $(n+1)$, l'équation est donc équivalente à :

$(n+1)(n^2 + 2n - 48) = 0$

C'est une équation produit :

$n + 1 = 0$ ou $n^2 + 2n - 48 = 0$

$n = -1$: impossible puisque $n > 0$

On calcule le discriminant de l'équation du second degré :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-48) = 196$$

Les deux solutions sont :

$n = \dfrac{-2 - \sqrt{196}}{2} = -8$ ou $n = \dfrac{-2 + \sqrt{196}}{2} = 6$

n représentant une longueur, la seule solution est $n = 6$.

Les dimensions de l'aquarium sont 6 m, 7 m et 8 m.

Cherchons maintenant le coût de fabrication :

Chaque arête est présente 4 fois, donc le coût pour le ruban est : $4 \times (6 + 7 + 8) \times 0{,}2 = 16{,}8$

Le prix du ruban adhésif est 16,8 €.

Cherchons l'aire de la surface vitrée :

Les faces de l'aquarium sont rectangulaires deux à deux identiques :

$2 \times (6 \times 7 + 7 \times 8 + 8 \times 6) = 292\ \text{dm}^2$

$292\ \text{dm}^2 = 2{,}92\ \text{m}^2$

Coût de la surface vitrée : $50 \times 2{,}92 = 146$ €.

Le coût total de l'aquarium est :

$146 + 16{,}8 = 162{,}8$ €.

128 Déterminons la distance d entre deux rangées.

Le nombre de pommiers de la parcelle est donné par l'expression :

$\left(\dfrac{140}{d} + 1\right)\left(\dfrac{28}{d} + 1\right)$

Ce qui permet d'obtenir l'équation :

$\left(\dfrac{140}{d} + 1\right)\left(\dfrac{28}{d} + 1\right) = 369$

En développant le membre de gauche :

$$\frac{3\,920}{d^2}+\frac{168}{d}+1=369$$

Ce qui donne l'équation :

$$\frac{-368d^2+168d+3\,920}{d^2}=0$$

$d \neq 0$, donc l'équation est équivalente à :

$-368d^2+168d+3\,920=0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 168^2-4\times(-368)\times 3\,920 = 2\,408^2$

Les deux solutions sont :

$$d=\frac{-168-\sqrt{2\,408^2}}{2\times(-368)}=3{,}5 \text{ ou}$$

$$d=\frac{-168+\sqrt{2\,408^2}}{2\times(-368)}=-\frac{70}{23}$$

Or d étant une distance est un nombre positif.

On peut donc conclure que la distance entre deux rangées est 3,5 m.

Le ramassage se fera donc à l'aide d'un tracteur de taille moyenne. Le coût étant de 75 € pour 1 h de ramassage.

Déterminons le nombre de rangées :

$$\frac{24}{3{,}5}+1=9.$$

Il faudra donc prévoir 9 h pour le ramassage de la parcelle, soit un coût égal à $9\times 75=675$ €.

129 Déterminons le prix de vente d'une tonne de pâte à papier.

L'activité est à l'équilibre lorsque l'entreprise produit et vend 20 tonnes et on note p le prix de vente en euros d'une tonne de pâte à papier.

$20^2+632\times 20+1000=20p$

$14\,040=20p$

$$p=\frac{14\,040}{20}=702 \text{ €}.$$

Les coûts sont la somme des coûts fixes et des coûts variables :

$C=C_F+C_V$

$C=650+200+150+q^2+632q$

$C=q^2+632q+1000$

Le bénéfice est alors donné par :

$702q-(q^2+632q+1000)=-q^2+70q-1000$

Déterminons la quantité à produire pour que la production soit rentable.

$\Delta=70^2-4\times 1000=900$

Les deux racines sont données par :

$$q_1=\frac{-70-\sqrt{900}}{-2}=50 \text{ ou } q_2=\frac{-70+\sqrt{900}}{-2}=20$$

On peut alors dresser le tableau de signes :

q	0		20		50		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	0	$-$	

La production est rentable pour une quantité comprise strictement entre 20 et 50 tonnes de pâte à papier.

Cherchons le bénéfice maximal :

$$\begin{aligned}-q^2+70q-1000 &= -(q^2-70q)-1000\\ &= -(q-35)^2+35^2-1000\\ &= -(q-35)^2+225\end{aligned}$$

Comme $(q-35)^2 \geqslant 0$ pour tout nombre q, on en déduit que :

$-(q-35)^2 \leqslant 0$ et $-(q-35)^2+225 \leqslant 225$.

Le bénéfice est maximal est donc 225 € et il correspond à une production de 35 tonnes.