coefficients de la forme canonique d'un trinôme

La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est $a(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont deux réels.

Comment déterminer les coefficients α et β ?

Plus précisément, comment exprimer α et β en fonction des coefficients a, b et c du trinôme, étant entendu que nous avons admis sans démonstration que nous avions : $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Existe-t-il une formule similaire qui nous donne β en fonction des coefficients a, b et c.

Examinons les écritures ci-dessous. Par mise en facteur du coefficient a dans l'expression développée du trinôme, puis identification d'un début d'identité remarquable, nous obtenons les égalités :

$$ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

Donc :

$$ax^2+bx+c=a\left(x\underbrace{+\frac{b}{2a}}_{-\alpha}\right)^2+\underbrace{a\left[-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]}_{\beta}=a(x-\alpha)^2+\beta$$

D'où : $\alpha=-\frac{b}{2a}$

Et : $\beta=a\left[-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left[-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=-\frac{b^2}{4a}+c=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$

Avec : $\Delta=b^2-4ac$

Conclusion

Entre les coefficients de la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ et ceux du trinôme $ax^2 + bx + c$, nous avons les relations :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$