Exercice 1

$$2(x-3)(x+\tfrac{1}{2}) = 2\left[x^2+\tfrac{1}{2}x-3x-\tfrac{3}{2}\right] = 2\left[x^2-\tfrac{5}{2}x-\tfrac{3}{2}\right]$$
$$= 2x^2-5x-3$$

$$-3(x-1)(x-2) = -3\left[x^2-2x-x+2\right] = -3(x^2-3x+2)$$
$$= -3x^2+9x-6$$

Exercice 2

$$x^2-4x+4 = x^2-2x(2)+2^2 = (x-2)^2$$
$$9x^2+6x+1 = (3x)^2+2(3x)(1)+1^2 = (3x+1)^2$$
$$4x^2-9 = (2x)^2-3^2 = (2x-3)(2x+3)$$

Exercice 3

$$x^2-12x+1 = (x-6)^2-36+1 = (x-6)^2-35$$
$$x^2+x-\tfrac{3}{2} = (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2} = (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{7}{4}$$
$$3x^2+18x-1 = 3(x^2+6x)-1 = 3\left[(x+3)^2-9\right]-1$$
$$= 3(x+3)^2-27-1$$
$$= 3(x+3)^2-28$$
$$2x^2-3x+5 = 2(x^2-\tfrac{3}{2}x)+5 = 2\left[(x-\tfrac{3}{4})^2-\tfrac{9}{16}\right]+5$$
$$= 2\left[(x-\tfrac{3}{4})^2\right]-\tfrac{9}{8}+5 = 2(x-\tfrac{3}{4})^2-\tfrac{9}{8}+\tfrac{40}{8}$$
$$= 2(x-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{31}{8}$$

Exercice 4

$$3(x-2)^2+5 = 3(x^2-4x+4)+5 = 3x^2-12x+12+5$$
$$= 3x^2-12x+17$$

$$-4(x-\tfrac{1}{2})^2+4 = -4(x^2-x+\tfrac{1}{4})+4 = -4x^2+4x-1+4$$
$$= -4x^2+4x+3$$

Exercice 5

- Considérons le trinôme $\underbrace{2x^2}_{a} \underbrace{-3x}_{b} \underbrace{+4}_{c}$.

  On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23 < 0$
  le trinôme n'admet pas de racine.

- Considérons le trinôme $\underbrace{-2x^2}_{a} \underbrace{+5x}_{b} \underbrace{+1}_{c}$.

  On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-2)(1) = 25 + 8 = 33 > 0$
  le trinôme admet 2 racines distinctes

- Considérons le trinôme $3x^2 - 5x - 2$.

- On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49 > 0$
  le trinôme admet 2 racines distinctes.

- Considérons le trinôme $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$.

  On a : $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(-2x^2 - 5x + 1)$
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-2)(1) = 25 + 8 = 33 > 0$
  Le trinôme admet 2 racines distinctes.

- Considérons le trinôme $\frac{2}{5}x^2 - x + 3$.

  On a : $\frac{2}{5}x^2 - x + 3 = \frac{1}{5}(2x^2 - 5x + 15)$
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(15) = 25 - 120 < 0$
  le trinôme n'admet aucune racine

- Considérons le trinôme $1x^2 - 6x + 9$.

  On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$
  le trinôme admet 1 racine double

Exercice 6

On considère le trinôme $2x^2 - 4x - 16$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme.

$2x^2 - 4x - 16 = 2(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2(2)} = 1$

$= 2(x-1)^2 + \beta$

Pour $x = 1$, on a : $2x^2 - 4x - 16 = 2(1)^2 - 4(1) - 16$
$= 2 - 4 - 16$
$= \underbrace{-18}_{\beta}$

Ainsi : $\underline{2x^2 - 4x - 16 = 2(x-1)^2 - 18}$

2. Factorisons $2(x-1)^2 - 18$.

$2(x-1)^2 - 18 = 2\left[(x-1)^2 - 9\right] = 2\left[(x-1)^2 - (3)^2\right]$
$= 2\left[(x-1-3)(x-1+3)\right] = \underline{2(x-4)(x+2)}$

3. Les racines du trinôme sont $\underline{-2 \text{ et } 4}$.

Méthode 2

1. On a : $2x^2 - 4x - 16 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$
$b = -4$
$c = -16$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(-16) = 16 + 8.16 = 9(16) = 3^2 \times 4^2$

$\Delta = 12^2 = 144 > 0$. Le trinôme admet 2 racines x_1 et x_2.

Donc $\sqrt{\Delta} = 12$.

2. On a, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{4 - 12}{2(2)}$ $\quad$ $= \dfrac{4 + 12}{2(2)}$

$= -\dfrac{8}{4}$ $\quad$ $= \dfrac{16}{4}$

$\underline{x_1 = -2}$ $\quad$ $x_2 = \underline{4}$

3. On a donc $2x^2 - 4x - 16 = 2(x - x_1)(x - x_2)$
$= \underline{2(x+2)(x-4)}$

Exercice 7

On considère le trinôme $-x^2+5x-4$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme.

$$-x^2+5x-4 = -(x-\alpha)^2+\beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-1)} = \frac{5}{2}$$

$$= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\beta$$

Calculons β

$\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ où $\Delta = b^2-4ac = (5)^2-4(-1)(-4) = 25-16 = 9$

D'où : $\beta = -\frac{9}{4(-1)} = \frac{9}{4}$

En résultat, on a : $-x^2+5x-4 = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

2. Factorisons $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

On a : $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$$

$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\left[\left(x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= -[x-4](x-1)$$

3. Les racines du trinôme $-x^2+5x-4$ sont 1 et 4.

Vérification

Posons $A = -x^2+5x-4$.

Pour $x=1$, on a $A = -(1)^2+5(1)-4 = -1+5-4 = 0$

Pour $x=4$, on a $A = -(4)^2+5(4)-4 = -16+20-4 = 0$

Méthode 2

1. On considère le trinôme $-x^2+5x-4$.

$-x^2+5x-4 = ax^2+bx+c$ avec $a=-1$, $b=5$ et $c=-4$

Déterminons le discriminant Δ du trinôme.

On a $\Delta = b^2-4ac = (5)^2-4(-1)(-4) = 25-16 = 9 > 0$

Le trinôme admet 2 racines distinctes x_1 et x_2.

2. On a $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{2(-1)} = \frac{-8}{-2}$, $x_1 = 4$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{2(-1)} = \frac{-2}{-2}$, $x_2 = 1$

3. On a ainsi : $-x^2+5x-4 = -(x-1)(x-4)$

Exercice 8

On considère le trinôme $4x^2 - 12x + 9$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique de $4x^2 - 12x + 9$.

On a $4x^2 - 12x + 9 = 4(x^2 - 3x) + 9$

$= 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 9$

$= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 9 + 9$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

2. La factorisation est déjà obtenue au 1.
3. $\frac{3}{2}$ est une racine double du trinôme $4x^2 - 12x + 9$.

Méthode 2

1. On a $4x^2 - 12x + 9 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = -12$ et $c = 9$

Déterminons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$

2. Le trinôme admet donc 1 racine double x_0.
3. On a : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-12)}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Ainsi $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

Exercice 9

On considère le trinôme $-3x^2 - x - 4$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme.

On a $-3x^2 - x - 4 = -3(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$

Donc $\underbrace{-3x^2 - x - 4}_{A} = \underbrace{-3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \beta}_{B}$

Déterminons β par identification de A et B.

$B = -3\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \beta = -3x^2 - x - \frac{1}{12} + \beta$

$A = -3x^2 - x - 4$

donc $\beta - \frac{1}{12} = -4$

$\beta = \frac{1}{12} - 4$

$\beta = \frac{1}{12} - \frac{48}{12}$

$\beta = -\frac{47}{12}$

D'où : $-3x^2 - x - 4 = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{47}{12}$

2. On a $-3x^2 - x - 4 = -\left[3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{12}\right]$

Cette expression n'est pas factorisable !

3. Le trinôme n'admet donc aucune racine.

Méthode 2

On considère le trinôme $-3x^2 - x - 4$.

On a $-3x^2 - x - 4 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = -1$, $c = -4$

1. Déterminons Δ, discriminant du trinôme.
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-3)(-4) = 1 - 48 = -47 < 0$
2. $\Delta < 0$, donc le trinôme n'admet aucune racine.
3. $-3x^2 - x - 4$ n'est pas factorisable

Exercice 1b

On a : $A(x) = ax^2 + bx + c$

De plus : $A(0) = 6 \quad (1)$
$A(1) = 2 \quad (2)$
$A(2) = 0 \quad (3)$

$(1) \Longrightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Longrightarrow \underline{c = 6}$

$(2) \Longrightarrow a(1)^2 + b(1) + 6 = 2 \Longrightarrow a + b + 6 = 2 \Longrightarrow a + b = 2 - 6$

$\Longrightarrow a + b = -4$

$(3) \Longrightarrow a(2)^2 + b(2) + 6 = 0 \Longrightarrow 4a + 2b + 6 = 0 \Longrightarrow 4a + 2b = -6$

$\Longrightarrow 2a + b = -3$

On connaît $c = 6$. Déterminons a et b

Résolvons le système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

$$\begin{cases} a + b = -4 & (L_1) \\ 2a + b = -3 & (L_2) \end{cases}$$

$(L_2) - (L_1) \Longrightarrow a = -3 - (-4) \Longrightarrow a = -3 + 4 \Longrightarrow \underline{a = 1}$

$(L_1) \Longrightarrow 1 + b = -4 \Longrightarrow b = -4 - 1 = \underline{-5}$

En résultat : $A(x) = x^2 - 5x + 6$. ←—— forme développée

On a trivialement : $A(x) = (x-2)(x-3)$ ←—— forme factorisée

Et $A(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ←—— forme canonique